Ensino Médio e preparação para a educação superior

matemática

contexto e aplicações

volume único

dante

Manual do professor

editora ática

Professor

A resolução de todos os exercícios do livro **Matemática — Contexto & Aplicações, Volume Único** encontra-se no Manual do Professor, impresso e fornecido juntamente com o livro-texto.

Sumário

Apresentação

Do Autor

O autor é licenciado em Matemática pela Unesp de Rio Claro-SP, mestre em Matemática pela USP de São Carlos-SP, doutor em Psicologia da Educação: Ensino de Matemática pela PUC-SP e livre-docente em Educação Matemática pela Unesp de Rio Claro. Lecionou Matemática no Ensino Fundamental e Médio durante 8 anos e foi professor de Didática da Matemática e Prática de Ensino na Licenciatura em Matemática da Unesp–Rio Claro-SP durante 25 anos. Um dos idealizadores e coordenador do Mestrado em Educação Matemática da Unesp–Rio Claro-SP, onde foi professor e pesquisador por 10 anos, realizando estudos e pesquisas em ensino e aprendizagem da Matemática com alunos e professores, e divulgando-os em congressos nacionais e internacionais em 13 países. Orientou, ainda, 8 dissertações de Mestrado em Educação Matemática. Além disso, ministrou (e ainda ministra) centenas de palestras e cursos de atualização, em todo o país e no exterior, para professores de Educação Infantil, do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, sobre problemas relacionados com a aprendizagem e o ensino da Matemática nesses níveis.

Com base nessa vasta experiência em Educação Matemática, escreveu vários artigos e livros para alunos e professores, sempre buscando tornar a Matemática mais significativa e mais prazerosa aos alunos, além de mais próxima de sua vivência, estimulando-os a *fazer* Matemática, descobrindo e produzindo idéias matemáticas, formulando e resolvendo situações-problema.

Seus principais livros, todos publicados pela Editora Ática, são:

- *Matemática — Contexto & aplicações*, 3 v. (Ensino Médio)
- *Didática da resolução de problemas de Matemática* — 1ª a 5ª série
- Coleção Par ou Ímpar — *Fichas de Matemática para a pré-escola* (3 v.)
- *Didática da Matemática na pré-escola*
- *Vivência e Construção* — Coleção de Matemática de 1ª a 4ª série
- *Tudo é Matemática* — Coleção de Matemática de 5ª a 8ª série

Assessorou na elaboração dos guias e das propostas curriculares de Matemática para a rede pública do estado de São Paulo e dos *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática da SEF/MEC*. Atualmente, assessora muitas escolas da rede particular em seus planejamentos.

Agora, o autor apresenta esta obra para o Ensino Médio, colocando nela toda sua experiência, formação e vivência em Educação Matemática. Um livro que procura incorporar grande parte dos avanços obtidos em estudos e pesquisas realizados em Educação Matemática nas últimas décadas, sem, no entanto, exagerar em inovações que dificultem o trabalho significativo do professor em sala de aula.

Do Livro

O livro **Matemática — Contexto & Aplicações, Volume Único** para o Ensino Médio contempla todos os conteúdos de Matemática para esse nível de ensino ao abordar os grandes eixos temáticos: números, funções (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica, trigonométricas, polinomiais, seqüenciais), Álgebra (equações polinomiais, matrizes e sistemas), Geometria (plana, espacial e analítica), Estatística, probabilidade e Matemática financeira, sempre que possível *contextualizados, integrados entre si e de maneira interdisciplinar com as demais áreas do conhecimento por meio de aplicações*. Este livro não só traz todos os assuntos essenciais para o nível médio como também prepara o aluno para os processos seletivos de ingresso à educação superior. As atividades propostas procuram estimular a reflexão, possibilitando a construção, a apropriação gradativa e a fixação dos conhecimentos.

Do Manual do Professor

O *Manual do Professor* é composto de duas partes. Uma *parte geral* e uma *parte específica* para cada volume.

A parte geral contém:

1. Características do Volume Único

2. Algumas idéias para a utilização do Volume Único

3. Pressupostos teóricos para o ensino de Matemática segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

4. A avaliação em Matemática

5. Informações úteis ao professor para sua formação continuada

6. Referências bibliográficas para o professor

A parte específica contém:

1. Descrição do livro do aluno

2. Observações sobre os conteúdos

3. Identificação em cada capítulo dos problemas que envolvem contextualização, interdisciplinaridade e integração com outros temas matemáticos

4. Exercícios complementares que envolvem contextualização, interdisciplinaridade e integração com outros temas matemáticos

Parte I

1. Características do Volume Único

Introdução

Como qualquer outro material didático, o livro deve ser visto como mais um **importante auxiliar do professor** que busca ensinar Matemática de modo mais significativo para o aluno, com assuntos da vivência dele, desenvolvendo conceitos com compreensão e situações-problema interessantes, contextualizadas ou interdisciplinares.

Este livro e a Educação Matemática

Para se constituir realmente nesse importante auxiliar do professor, **Matemática — Contexto & Aplicações, Volume Único** incorporou muitos dos recentes avanços dos estudos e das pesquisas em Educação Matemática. Em geral, os conceitos são desencadeados a partir de um **problema**, como é recomendado hoje pelos educadores matemáticos que trabalham com **resolução de problemas**; a **modelagem matemática** é feita pela procura de modelos matemáticos a partir de problemas reais; e o uso da tecnologia de informação, como **calculadoras**, é feito em vários momentos do livro.

Ensinando por compreensão, contextualizando e aplicando

A tônica deste livro é ajudar o aluno a construir, desenvolver e aplicar idéias e conceitos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. E tudo isso partindo de situações-problema contextualizadas e, posteriormente, aplicando os conceitos em situações cotidianas ou em outras áreas do conhecimento.

Integração

Este livro procura em muitos momentos fazer a **integração** entre os grandes eixos temáticos, **números**, **funções**, **Álgebra**, **Geometria**, **contagem**, Estatística e **probabilidade**, que será explicitada na *parte específica* deste Manual.

Contextualização

Sempre que possível, o desencadeamento de novos conceitos foi feito por meio de **situações-problema contextualizadas**. Muitos dos exemplos e dos exercícios propostos também foram apresentados por meio de situações contextualizadas, como veremos na *parte específica*.

Interdisciplinaridade

Em muitos problemas e exercícios deste volume único procurou-se aplicar conceitos matemáticos na solução de situações de outros componentes curriculares, como Física, Química, Biologia, etc. Eles serão explicitados mais adiante na *parte específica* deste Manual.

Trabalhando com raciocínio: seção Para Refletir

Esta é uma seção importante do livro. Ela chama a atenção do aluno para refletir, constatar, descobrir ou provar algo.

Exemplos

Os exemplos têm a finalidade de mostrar as várias abordagens de resolução de uma determinada questão ou problema. **Não** devem ser vistos como modelos que os alunos apenas imitam e dos quais repetem estratégias.

Exercícios propostos

Há uma grande variedade e quantidade de exercícios e problemas para o aluno consolidar os seus conhecimentos. Quanto mais problemas variados o aluno resolver, mais bem preparado estará para enfrentar problemas novos e inéditos.

Exercícios e testes de revisão

No final de cada capítulo, há uma seção de exercícios e testes para o aluno revisar o conteúdo aprendido no capítulo. Em geral, os testes foram selecionados de vestibulares recentes, ou, quando muito significativos, de vestibulares mais antigos.

Testes finais

No final do livro há 300 questões de vestibular (dos últimos anos) relativas à matéria dos três anos do Ensino Médio. Tudo isso possibilita ao aluno verificar o nível de aprendizagem conseguido.

2. Algumas idéias para a utilização do Volume Único

Cada professor tem a **sua** própria maneira de dar aula. Apesar disso, esboçamos aqui uma espécie de roteiro que o professor poderá seguir, dependendo de suas características próprias. Naturalmente, é bastante salutar que cada professor, com sua criatividade e experiência de sala de aula, modifique tal roteiro, sempre visando à aprendizagem significativa dos seus alunos.

Esboço de roteiro

Leitura

Os alunos fazem a leitura do texto, que pode ser individualmente, em duplas, em grupos maiores, com ou sem ajuda do professor. Isso auxilia a interpretação e a compreensão de texto e desenvolve a autonomia dos alunos.

Destaques feitos pelo professor

O professor estimula a discussão em classe do que foi lido, promovendo troca de idéias entre os alunos e destacando os pontos fundamentais na lousa.

Exemplos

Os alunos, coletivamente ou não, estudam os exemplos e tiram dúvidas das passagens que não entenderam. Às vezes, a critério do professor, é importante que refaçam esses exemplos no caderno.

Exercícios propostos

Na classe, os alunos tentam resolver individualmente tais exercícios. Depois, em pequenos grupos, conferem suas estratégias e resultados. O professor, circulando entre os grupos, acompanha, ajuda, instiga, faz perguntas, destaca idéias fundamentais, sente as dificuldades dos alunos e solicita que alguns exercícios sejam resolvidos na lousa.

Exercícios e testes de revisão

Os alunos resolvem individualmente, em casa, alguns exercícios indicados pelo professor. Na classe, ao corrigir e discutir os exercícios, alguns alunos mostram suas soluções na lousa, com eventuais observações do professor. Em seguida, o professor pode estimular os alunos a resolver algumas questões do final do livro.

3. Pressupostos teóricos para o ensino de Matemática segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Introdução

Na nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9 394/96), a educação escolar compõe-se de: **Educação Básica**, formada pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, e **Educação Superior**. A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos superiores.

Objetivos do Ensino Médio

O Ensino Médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, tem como finalidades:

I — a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos;

II — a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III — o aprimoramento do educando como ser humano, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV — a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Além disso, o currículo do Ensino Médio observará as seguintes diretrizes:

I — destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da Ciência, das Letras e das Artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;

II — adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes.

Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que, ao final do Ensino Médio, o educando demonstre:

I — domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

II — conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;

III — domínio dos conhecimentos de Filosofia e Sociologia necessários ao exercício da cidadania.

Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio

O que essas diretrizes propõem é que o Ensino Médio, como parte da educação básica, seja desenvolvido de forma **contextualizada** e **interdisciplinar**.

A contextualização

Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o apreendido com o observado e a teoria com suas conseqüências e aplicações práticas.

A interdisciplinaridade

Propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos de modo a destacar as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível a fragmentação entre elas.

É sabido que algumas disciplinas se identificam, se aproximam, têm muitas afinidades (como, por exemplo, a Matemática e a Física), enquanto outras se diferenciam em vários aspectos: pelos métodos e procedimentos que envolvem, pelo objeto que pretendem conhecer ou ainda pelo tipo de habilidade que mobilizam naquele que as investiga, conhece, ensina ou aprende.

Os professores de uma mesma classe podem promover um ensino interdisciplinar por meio de um projeto de investigação, um plano de intervenção ou mesmo de uma atividade. Neste caso, são identificados os conceitos e procedimentos de cada disciplina que podem contribuir nesta tarefa, descrevendo-a, explicando-a, prevendo soluções e executando-a. Numa tarefa como essa, os conceitos podem ser formalizados, sistematizados e registrados no âmbito das disciplinas que contribuem para o seu desenvolvimento, ou seja, a interdisciplinaridade não pressupõe a diluição das disciplinas. A tarefa a ser executada é que é interdisciplinar na sua concepção, execução e avaliação.

A linguagem matemática é interdisciplinar com as demais áreas do currículo. Por exemplo, os conceitos das Ciências Naturais (Física, Química e Biologia) e as leis naturais geralmente são expressos pela linguagem matemática.

A Matemática no Ensino Médio

Princípios norteadores

Os estudos e pesquisas das últimas décadas em Educação Matemática (área do conhecimento que estuda a aprendizagem e o ensino da Matemática) e as práticas educativas bem-sucedidas em sala de aula sugerem que devemos ter em mente os seguintes princípios ao ensinar Matemática:

- A Matemática é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. Apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a formação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, das relações sociais, culturais e políticas.
  Para exercer plenamente a cidadania é preciso saber contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, argumentar logicamente, conhecer formas geométricas e organizar, analisar e interpretar criticamente as informações.
  A visão da Matemática como uma maneira de pensar, como um processo em permanente evolução (não sendo algo pronto e acabado que apenas deve ser estudado), permite ao aluno, dinamicamente, a construção e apropriação do conhecimento. Permite também que o aluno a

compreenda no contexto histórico e sociocultural em que ela foi desenvolvida e continua se desenvolvendo.

- Compreender e usar as idéias básicas de Matemática no seu dia-a-dia é um direito de todos os alunos, e não apenas daqueles que têm mais afinidade com o raciocínio lógico. A Matemática está presente em praticamente tudo, com maior ou menor complexidade. Perceber isso é compreender o mundo à sua volta e poder atuar nele. E a todos, indistintamente, deve ser dada essa possibilidade de compreensão e atuação como cidadão.
  Em casa, na rua, no comércio, nas várias profissões, na cidade, no campo, nas várias culturas, o homem necessita contar, calcular, comparar, medir, localizar, representar, interpretar, etc., e o faz informalmente, à sua maneira, com base em parâmetros do seu contexto sociocultural. É preciso que esse saber informal, cultural, se incorpore ao trabalho matemático escolar, diminuindo a distância entre a Matemática da escola e a Matemática da vida.
- Numa sociedade do conhecimento e da comunicação, como será a do terceiro milênio, é preciso que os alunos comecem a comunicar idéias, procedimentos e atitudes matemáticas, falando, dramatizando, escrevendo, desenhando, representando, construindo tabelas, diagramas e gráficos, fazendo estimativas, conjecturas e inferências lógicas, etc. Tudo isso trabalhando individualmente, em duplas e em pequenas equipes, colocando o que pensam e respeitando o pensamento dos colegas.
- Os conteúdos devem ter relevância social, propiciando conhecimentos básicos essenciais para qualquer cidadão (contar, medir, calcular, resolver problemas, reconhecer fórmulas, compreender a idéia de probabilidade, saber tratar as informações, etc.). Precisam estar articulados entre si e conectados com outras áreas do conhecimento, promovendo a interdisciplinaridade.
- Aprender Matemática é aprender a resolver problemas. Para resolver problemas é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas. Assim, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados com a total compreensão de todos os significados associados a eles.
- Os materiais didáticos auxiliares do professor, quando adequadamente utilizados, ajudam na compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Do quadro-de-giz ao computador — incluindo o caderno de problemas, exercícios e desafios, o caderno quadriculado, o caderno de desenho e construções, os instrumentos (régua, esquadro, transferidor, compasso, etc.), livros didáticos e paradidáticos, jogos, o material de sucata e estruturado, a calculadora, os vídeos e CD-ROMs —, todos eles, quando clareiam idéias e ajudam o aluno a pensar e construir conhecimentos, são fundamentais.
- A avaliação dos objetivos traçados, dos conteúdos trabalhados, dos métodos desenvolvidos, dos materiais didáticos usados e do envolvimento e crescimento dos alunos precisa ser natural, contínua, com a finalidade de verificar o que não vai bem no processo ensino/aprendizagem, para reorientá-lo continuamente por aproximações sucessivas.

Objetivos gerais do ensino da Matemática do nível médio

Atualmente vivemos na sociedade da informação, globalizada, e é fundamental que se desenvolva nos alunos do Ensino Médio a capacidade de: comunicar-se em várias linguagens; investigar, resolver e elaborar problemas; tomar decisões, fazer conjecturas, hipóteses e inferências; criar estratégias e procedimentos, adquirir e aperfeiçoar conhecimentos e valores; trabalhar solidária e cooperativamente; e estar sempre aprendendo.

No Ensino Fundamental, os alunos tiveram um primeiro contato com vários temas matemáticos, como números, formas geométricas, grandezas e medidas, iniciação à Álgebra, aos gráficos e às noções de probabilidade. Agora, no Ensino Médio, é hora de ampliar e aprofundar tais conhecimentos, estudar outros temas, desenvolver ainda mais a capacidade de raciocinar, de resolver problemas, generalizar, abstrair e de analisar e interpretar a realidade que nos cerca, usando para isso o instrumental matemático.

Assim, a Matemática no Ensino Médio tem um caráter tanto formativo, que auxilia a estruturação do pensamento e do raciocínio lógico, quanto instrumental, utilitário, de aplicação no dia-a-dia, em outras áreas do conhecimento e nas atividades profissionais.

Por outro lado, a Matemática tem características próprias, tem uma beleza intrínseca que deve ser ressaltada na importância dos conceitos, das propriedades, das demonstrações dos encadeamentos lógicos, do seu aspecto dedutivo, fundamentando seu caráter instrumental e validando intuições e conjecturas. Assim, no Ensino Médio é importante trabalhar gradativamente a Matemática também como um sistema abstrato de idéias.

Objetivos específicos da Matemática no Ensino Médio

As atividades de Matemática devem levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele adquirir uma formação científica geral e avançar em estudos posteriores;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos nas atividades cotidianas, na atividade tecnológica e na interpretação da ciência;
- desenvolver a capacidade de raciocínio, de resolver problemas, de comunicação, bem como seu espírito crítico e sua criatividade;
- estabelecer conexões e integração entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do currículo;
- expressar-se em linguagem oral e escrita e de forma gráfica diante de situações matemáticas, em outras áreas do conhecimento e no cotidiano, valorizando a linguagem matemática na comunicação de idéias;
- usar e reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito;
- analisar e interpretar criticamente dados provenientes de problemas matemáticos, de outras áreas do conhecimento e do cotidiano;
- desenvolver atitudes positivas em relação à Matemática, como autonomia, confiança em relação às suas capacidades matemáticas, perseverança na resolução de problemas, gosto pela Matemática e pelo trabalho cooperativo.

Competências a serem desenvolvidas com o ensino da Matemática no Ensino Médio

(Adaptadas do documento preliminar: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio – Semtec/MEC)

São três os principais campos de competência que devemos desenvolver com a Matemática no Ensino Médio:

- representação e comunicação
- investigação e compreensão
- percepção sociocultural e histórica da Matemática

Em cada um desses campos de competência, destacamos por um lado **valores e atitudes** e, por outro, **procedimentos e habilidades**.

Competência: representação e comunicação

Valores e atitudes: o aluno deve desenvolver hábitos de trabalho e persistência, manifestando interesse, organizando seus registros e trabalhos e apresentando-os de forma adequada.

Procedimentos e habilidades: o aluno deve desenvolver a capacidade de comunicação e representação, lendo e interpretando corretamente situações matemáticas, usando várias representações (expressões matemáticas, tabelas, gráficos, equações, diagramas, fórmulas) para comunicar idéias matemáticas; deve entender fenômenos das ciências naturais e fatos do cotidiano.

Competência: investigação e compreensão

Valores e atitudes: é necessário que o aluno desenvolva a confiança em si próprio, expressando e fundamentando suas opiniões, enfrentando com confiança situações novas, refletindo e formulando juízos sobre situações com que se depara, tendo iniciativa na busca de informações, e que desenvolva a curiosidade e o gosto de aprender, interessando-se pela pesquisa.

Procedimentos e habilidades: é necessário também que o aluno desenvolva a capacidade de resolver problemas, compreendendo o problema (lendo e interpretando o enunciado, identificando os dados e a pergunta que se quer responder), planejando a solução, formulando hipóteses e prevendo os resultados, selecionando estratégias de resolução, executando os planos realizados e verificando, interpretando, criticando e generalizando os resultados, elaborando novos problemas; que desenvolva o raciocínio, pensando logicamente, tirando conclusões a partir de gráficos, figuras e esquemas, utilizando raciocínio indutivo e dedutivo, elaborando e validando hipóteses e conjecturas, argumentando logicamente.

Competência: percepção sociocultural e histórica da Matemática

Valores e atitudes: o aluno deve desenvolver a percepção do valor da Matemática como construção humana, reconhecendo a contribuição da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do homem através do tempo, apreciando a beleza intrínseca da Matemática e da presença dela na arte, na natureza, nas ciências, na tecnologia e no cotidiano; deve desenvolver o sentido de coletividade e de cooperação, participando cooperativamente dos trabalhos em equipe, respeitando opiniões divergentes das suas e aceitando as diferenças individuais, participando das soluções dos problemas da comunidade escolar e da comunidade em que está inserido.

Procedimentos e habilidades: é necessário que o aluno desenvolva a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção do real, usando a modelagem matemática, aplicando métodos matemáticos em situações reais e em outras áreas do conhecimento, relacionando episódios da história da Matemática com a evolução da humanidade, utilizando adequadamente as tecnologias da informação (calculadora, computador), reconhecendo suas potencialidades e limitações, utilizando corretamente instrumentos de construção e medição.

Orientações metodológicas

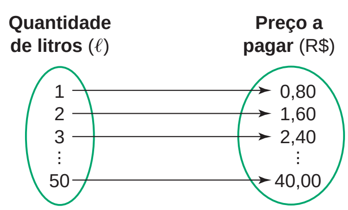
O mundo está em constante mudança, dado o grande e rápido desenvolvimento da tecnologia. Máquinas de calcular, computadores, Internet, etc. são assuntos do dia-a-dia, e todos eles têm ligações estreitas com a Matemática. Para acompanhar essa rápida mudança, foi necessário estudar e pesquisar como deveria ser o ensino de Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Nas últimas décadas, muitos pesquisadores da Psicologia cognitiva se dedicaram a estudar e pesquisar como os alunos aprendem, como aplicam o que aprendem para resolver situações-problema, como constroem conceitos, qual é a maturidade cognitiva necessária para se apropriar, com significado, de determinado conceito, como a interação com o meio social desenvolve a aprendizagem, dentre muitos outros assuntos. A partir daí surgiu o movimento socioconstrutivista que estamos vivenciando atualmente.

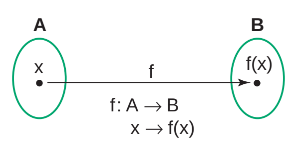
Aproveitando tais pesquisas e estudos, educadores matemáticos do mundo todo começaram a se reunir em grupos e em congressos internacionais para discutir como usar todos esses avanços da Psicologia cognitiva. Teve início, então, um grande movimento internacional de melhoria da aprendizagem e do ensino da Matemática, surgindo a Educação Matemática — área do conhecimento já consolidada, que vem contribuindo muito, por meio de estudos e pesquisas, para mudar o ensino da Matemática no mundo todo.

Os avanços já conquistados pela Educação Matemática indicam que, para que o aluno aprenda Matemática com significado, é fundamental:

- **trabalhar as idéias, os conceitos matemáticos intuitivamente, antes da simbologia, antes da linguagem matemática**. Por exemplo, antes de ser apresentada em linguagem matemática, a idéia de função deve ser trabalhada de forma intuitiva com o aluno. Uma situação-problema que torna isso possível é: "Considere a quantidade de litros de gasolina e os preços respectivos a pagar:



O preço a pagar é dado **em função** da quantidade de litros que se coloca no tanque, ou seja, o preço a pagar **depende** do número de litros comprados". Depois desse trabalho intuitivo calcado na construção de conceitos é que, pouco a pouco, vamos introduzindo a linguagem matemática:



"A cada **x** de **A** corresponde um único f(x) de **B**, levado pela função **f**."

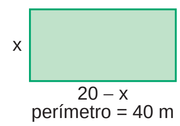
- **que o aluno aprenda por compreensão**. O aluno deve saber o porquê das coisas, e não simplesmente mecanizar procedimentos e regras.

Por exemplo, não basta dizer que o número racional 0,3333... é igual a $\frac{3}{9}$; é preciso, para a sua compreensão, saber por que isso ocorre, fazendo:

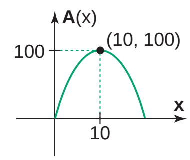
$$x = 0{,}3333... \Rightarrow 10x = 3{,}333... = 3 + 0{,}333... = 3 + x \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- **estimular o aluno para que pense, raciocine, crie, relacione idéias, descubra e tenha autonomia de pensamento**. Em lugar de simplesmente imitar, repetir e seguir o que o professor fez e ensinou, o próprio aluno **pode e deve fazer Matemática**, descobrindo ou redescobrindo por si só uma idéia, uma propriedade, uma maneira diferente de resolver uma questão, etc. Para que isso ocorra, é preciso que o professor crie oportunidades e condições para o aluno descobrir e expressar suas descobertas. Por exemplo, **desafios**, **jogos**, **quebra-cabeças**, **problemas curiosos**, etc. ajudam o aluno a pensar logicamente, a relacionar idéias e a realizar descobertas.

- **trabalhar a Matemática por meio de situações-problema próprias da vivência do aluno e que o façam realmente pensar, analisar, julgar e decidir pela melhor solução**. Por exemplo, a seguinte situação-problema poderá desencadear o estudo da função quadrática: "Se quisermos cercar um terreno de forma retangular com uma tela de 40 m de comprimento, de modo a cercar a maior área possível, quais devem ser as dimensões do terreno?". Nesse caso, temos a função quadrática $f(x) = -x^2 + 20x$, cujo gráfico vem a seguir:



Área: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x$



O ponto de máximo da parábola (10, 100) dará a solução do problema. Assim, o terreno que satisfaz as condições do problema é de forma quadrada (o quadrado é um caso particular de retângulo), de lado igual a 10 m e área igual a 100 m^2.

Já é consenso entre os educadores matemáticos que a capacidade de pensar, raciocinar e **resolver problemas** deve constituir um dos principais objetivos do estudo da Matemática. Para desenvolver um trabalho significativo na sala de aula com base em resolução de problemas, veja as sugestões contidas no livro *Didática da resolução de problemas de Matemática*, da Ática, deste mesmo autor.

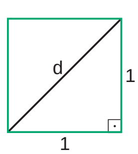
- **que o conteúdo trabalhado com o aluno seja significativo, que ele sinta que é importante saber aquilo para a sua vida em sociedade ou que lhe será útil para entender o mundo em que vive**. Por exemplo, ao trabalhar as diversas funções e seus gráficos relacionando-os com a vivência e com fenômenos das ciências naturais, ao resolver problemas de juros compostos usando logaritmos, ao coletar dados, fazer tabelas, gráficos e fazer sua interpretação, ao estudar probabilidade com as leis de Mendel da Biologia, etc., o aluno percebe que tudo isso tem sentido em sua vida presente e futura.

  Para que o aluno veja a Matemática como um assunto útil e prático e possa apreciar o seu poder, precisa perceber que ela está presente em praticamente tudo e é aplicada para resolver problemas do mundo real e entender uma grande variedade de fenômenos.

- **valorizar a experiência acumulada pelo aluno fora da escola**. É preciso lembrar que, quando o aluno chega ao Ensino Médio, já viveu intensamente até os seus 14 anos de idade. A partir dessa vivência, o professor deve iniciar o trabalho de construir e aplicar novos conceitos matemáticos, dando continuidade ao que o aluno já aprendeu no Ensino Fundamental e na vida.
- **estimular o aluno para que faça cálculo mental, estimativas e arredondamentos, obtendo resultados aproximados**. Por exemplo, quando o aluno efetua a divisão 306 ÷ 3 e coloca

12 como resultado, ele evidencia que não tem sentido numérico, não sabe arredondar (300 ÷ 3 = 100), enfim, falta-lhe a habilidade de cálculo mental. Muitas vezes, mais vale saber qual é o resultado aproximado do que o resultado correto propriamente dito.

- **considerar mais o processo do que o produto da aprendizagem — "aprender a aprender" mais do que resultados prontos e acabados**. É muito mais importante valorizar a maneira como o aluno resolveu um problema, especialmente se ele fez de uma maneira autônoma, original, em vez de simplesmente verificar se acertou a resposta. O mesmo se pode dizer sobre o modo de realizar operações, medições, resolver equações e sobre as maneiras de observar e descobrir propriedades e regularidades em algumas formas geométricas.
- **compreender a aprendizagem da Matemática como um processo ativo**. Os alunos são pessoas ativas que observam, constroem, modificam e relacionam idéias, interagindo com outros alunos e pessoas, com materiais diversos e com o mundo físico. O professor precisa criar um ambiente de busca, de construção e de descoberta e encorajar os alunos a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar idéias matemáticas. As salas de aula deveriam ser verdadeiras salas-ambiente de Matemática, equipadas com grande diversidade de materiais instrucionais que favorecessem a curiosidade e a aprendizagem matemática.
- **permitir o uso adequado das calculadoras e computadores**. Em uma sociedade da comunicação que se apóia no uso das calculadoras e computadores, nada mais natural que os alunos utilizem essas ferramentas para explorar idéias numéricas, regularidades em seqüências, tendências, comprovação de cálculos com "números grandes", aplicações da Matemática em problemas reais, etc. Por exemplo, na resolução de problemas, o aluno pode se concentrar mais nos métodos, nas estratégias, nas descobertas, no relacionar logicamente idéias matemáticas e na generalização do problema, deixando os cálculos para que a máquina execute.
- **utilizar a história da Matemática como um excelente recurso didático**. Comparar a Matemática de diferentes períodos da História ou de diferentes culturas; por exemplo, pode-se contar o episódio no qual os pitagóricos só conheciam os números racionais e acreditavam apenas na existência dos segmentos comensuráveis (um pode ser medido pelo outro e a medida é um número racional). Ao medir a diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade, usando este lado como unidade de medida, surgem os números irracionais ($\sqrt{2}$, no caso) e os segmentos incomensuráveis.



$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$d = \sqrt{2}$

O lado do quadrado e a diagonal desse quadrado são segmentos incomensuráveis.

- **utilizar jogos**. Os jogos constituem outro excelente recurso didático, pois podem possibilitar a compreensão de regras, promover interesses, satisfação e prazer, formar hábitos e gerar a identificação de regularidades. Além disso, facilitam o trabalho com símbolos e o raciocínio por analogias.
- **trabalhar o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática**. Reforçar a autoconfiança na resolução de problemas, o interesse por diferentes maneiras de solucionar um problema, a observação de características e regularidades de números, funções, formas geomé-

tricas, etc. Sensibilizar o aluno para organizar, argumentar logicamente e ver a beleza intrínseca da Matemática (simetrias, regularidades, logicidade, encadeamentos lógicos, etc.).

- **enfatizar igualmente os grandes eixos temáticos — números, funções, Álgebra, Geometria, contagem, Estatística e probabilidade — e, de preferência, trabalhá-los integralmente**. Por exemplo, quando se está estudando a função afim, cujo gráfico é uma reta não-paralela ao eixo vertical, pode-se estudar um pouco de Geometria analítica explorando o coeficiente angular da reta, determinando a equação da reta que passa por dois pontos, etc. Esse tipo de atividade, que integra os eixos de conteúdos, é muito importante para que o aluno sinta uma certa unidade na Matemática.

A **alfabetização matemática**, exigida para todo cidadão do terceiro milênio, não se restringe a números e cálculos. Tão importante quanto os números é a **Geometria**, que permite compreender: o espaço, sua ocupação e medida; as superfícies, suas formas, regularidades e medidas; as linhas, suas propriedades e medidas; e as relações entre todas essas formas geométricas.

Atualmente, igual importância tem a **Estatística**, que cuida da coleta e organização de dados numéricos em tabelas e gráficos para facilitar a comunicação. Da mesma forma, a **probabilidade**, que trata das "previsões" e das chances de algo ocorrer.

O tema *funções*, integrador por excelência, é um dos mais importantes da Matemática. Por meio das funções e seus gráficos podemos entender melhor vários fenômenos das ciências naturais e fatos da atualidade.

4. A avaliação em Matemática

Introdução

A avaliação é um instrumento fundamental para fornecer informações sobre **como está se realizando o processo ensino-aprendizagem** como um todo — tanto para o professor e a equipe escolar conhecerem e analisarem os resultados de seu trabalho, como para o aluno verificar seu desempenho. E não simplesmente focalizar o aluno, seu desempenho cognitivo e o acúmulo de conteúdos, para classificá-lo em "aprovado" ou "reprovado".

Além disso, ela deve ser essencialmente **formativa**, na medida em que cabe à avaliação subsidiar o trabalho pedagógico, redirecionando o processo ensino-aprendizagem para sanar dificuldades, aperfeiçoando-o constantemente. A avaliação vista como um **diagnóstico contínuo** e **dinâmico** torna-se um instrumento fundamental para repensar e reformular os métodos, os procedimentos e as estratégias de ensino, para que realmente o aluno aprenda.

Nessa perspectiva, a avaliação deixa de ter o caráter "classificatório" de simplesmente aferir acúmulo de conhecimento para promover ou reter o aluno. Ela deve ser entendida pelo professor como **processo de acompanhamento** e compreensão dos avanços, dos limites e das dificuldades dos alunos para atingirem os objetivos da atividade de que participam.

Assim, o objetivo da avaliação é **diagnosticar** como está se dando o processo ensino-aprendizagem e coletar informações para corrigir possíveis distorções observadas nele. Por exemplo, se os resultados da avaliação não foram satisfatórios, é preciso buscar as **causas**. Pode ser que os objetivos foram superdimensionados ou que o problema esteja no conteúdo, na metodologia de ensino, nos materiais instrucionais, na própria forma de avaliar ou em algum outro aspecto. O importante é determinar os fatores do insucesso e reorientar as ações para sanar ou minimizar as causas e promover a aprendizagem do aluno.

Em resumo, avalia-se para identificar os problemas e os avanços e redimensionar a ação educativa, visando ao sucesso escolar.

O que e quando avaliar?

Incidindo sobre os aspectos globais do processo ensino-aprendizagem, a avaliação oferece informações sobre os objetivos, os métodos, os conteúdos, os materiais pedagógicos, os próprios procedimentos de avaliação — se houve ou não crescimento e envolvimento do aluno em todo o processo, ou até mudanças de suas atitudes. Enfim, não procede mais pensar que o único avaliado é o aluno e seu desempenho cognitivo.

A ação avaliativa deve ser contínua e não circunstancial, reveladora de todo o processo e não apenas do seu produto. E esse **processo contínuo** serve para constatar o que está sendo construído e assimilado pelo aluno e o que está em via de construção. Cumpre também o papel de identificar dificuldades para que sejam programadas atividades diversificadas de recuperação ao longo do ano letivo, de modo que não se acumulem e solidifiquem.

Devendo ser contínua e processual, a avaliação não pode simplesmente definir pela aprovação ou pela reprovação. A avaliação final representa um diagnóstico global do processo vivido — que servirá para o planejamento e a organização da próxima série (ou ciclo). Todavia, pode ocorrer que algum aluno não consiga um desenvolvimento equilibrado em todas as dimensões da formação apropriada àquela série (ou ciclo), dificultando a interação com sua turma de referência. A decisão da conveniência ou não de mantê-lo mais um ano naquela série (ou ciclo) deve ser coletiva, da equipe escolar, e não apenas de um professor. Levam-se em conta, nesse caso, o desempenho global do aluno e a pluralidade de dimensões que estão em jogo, como os benefícios da manutenção do aluno com seus pares para a socialização e o desenvolvimento equilibrado de habilidades, vivência e convivências. A permanência de algum aluno na série (ou ciclo) por mais um ano deve ser considerada uma situação excepcional e de modo algum uma prática escolar habitual.

Instrumentos de avaliação

O que tem sido feito usualmente é a verificação do aproveitamento do aluno apenas por meio de procedimentos formais, isto é, aplicação de provas escritas no final do mês ou do bimestre. É sabido que só isso não afere todos os progressos que o aluno alcançou, como: mudança de atitudes, envolvimento e crescimento no processo ensino-aprendizagem, avanço na capacidade de expressão oral ou na habilidade de manipular materiais pedagógicos descobrindo suas características e propriedades, etc. Por isso, sugerem-se vários tipos de instrumentos de avaliação:

Observação e registro

Ao avaliar o **desempenho global** do aluno, é preciso considerar os dados obtidos **continuamente** pelo professor a partir de **observações** que levem em conta os aspectos citados anteriormente e outros que possam traduzir seu aproveitamento.

Esse **acompanhamento das atividades**, no dia-a-dia dos alunos, é muito valioso, especialmente nas aulas que dão oportunidade de participação, nas quais o aluno pergunta, emite opiniões, levanta hipóteses, constrói novos conceitos e busca novas informações. Além disso, é possível observar nas atitudes dos alunos a responsabilidade, a cooperação, a organização e outros modos de agir.

Em suma, a **observação** permite ao professor obter informações sobre as habilidades cognitivas, as atitudes e os procedimentos dos alunos, em situações naturais e espontâneas.

O processo de observação deve ser acompanhado de cuidadoso **registro**, a partir de objetivos propostos e critérios bem definidos.

Provas, testes e trabalhos

Esses instrumentos de avaliação não devem ser utilizados como sanção, punição ou apenas para ajuizar valores. Devem, sim, ser encarados como oportunidades para perceber os avanços ou dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo em questão. Para isso, sua formulação deve se fundamentar em questões de compreensão e raciocínio, e não de memorização ou mecanização.

É interessante arquivar todos os trabalhos dos alunos em pastas ou portfólios individuais para que eles verifiquem, periodicamente, o quanto cresceram.

Entrevistas e conversas informais

É extremamente importante que o professor estabeleça canais de comunicação entre ele e os alunos para que possa ouvir o que eles têm a dizer sobre o processo de aprendizagem e perceber o que e como estão aprendendo. Isso pode ser feito individualmente, em pequenos grupos ou em conversas coletivas. Conversando também se avalia o que os alunos estão aprendendo ou não.

Auto-avaliação

Se pretendemos construir **sujeitos autônomos**, é preciso que o aluno exercite a reflexão sobre seu próprio processo de aprendizagem e socialização. A avaliação feita pelo próprio aluno, se bem orientada, é muito construtiva para favorecer uma análise crítica do próprio desempenho. Ele pode expressar-se por escrito ou oralmente: de que mais gostou ou de que menos gostou e por quê, quanto acha que aprendeu, em que teve mais dificuldade ou facilidade, o que na sua opinião deveria ser feito para melhorar seu desempenho, etc.

Fichas avaliativas

É importante que se tenha na escola uma ficha que revele à família, periodicamente e ao longo de todo o ano letivo, como está se desenvolvendo o processo educativo de seu filho. Nessa ficha poderão constar aspectos cognitivos, dificuldades de aprendizagem, providências tomadas para sanar as dificuldades, bem como aspectos gerais, afetivos, de socialização, organização, atitudes, etc.

Conclusão

Vimos, então, que a avaliação é um elemento, uma parte integrante do processo ensino-aprendizagem, abrangendo a atuação do professor, o desempenho do aluno e, também, os objetivos, a estrutura e o funcionamento da escola e do sistema de ensino. É algo bem mais amplo do que medir quantidade de conteúdos que o aluno aprendeu em determinado período.

PORTANTO, A AVALIAÇÃO DEVE SER COMPREENDIDA COMO:

"■ elemento integrador entre a aprendizagem e o ensino;
■ conjunto de ações cujo objetivo é o ajuste e a orientação da intervenção pedagógica para que o aluno aprenda da melhor forma;
■ conjunto de ações que busca obter informações sobre o que foi aprendido e como;
■ elemento de reflexão para o professor sobre sua prática educativa;

- instrumento que possibilita ao aluno tomar consciência de seus avanços, dificuldades e possibilidades;
- ação que ocorre durante todo o processo de ensino-aprendizagem e não apenas em momentos específicos caracterizados como fechamento de grandes etapas de trabalho.

Avaliar a aprendizagem, portanto, implica avaliar o ensino oferecido — se, por exemplo, não há a aprendizagem esperada significa que o ensino não cumpriu a sua finalidade: a de fazer aprender". (Parâmetros Curriculares Nacionais, v. 1 — Introdução. SEF/MEC — 1997 — Brasília.)

A avaliação em Matemática

A mudança no ensino da Matemática deve vir acompanhada por uma transformação de ênfase na maneira de avaliar o aluno. Os estudos e pesquisas em Educação Matemática relacionados com a avaliação apontam que devemos com:

Maior ênfase

- Avaliar o que os alunos sabem, como sabem e como pensam matematicamente.
- Avaliar se o aluno compreendeu os conceitos, os procedimentos e se desenvolveu atitudes positivas em relação à Matemática.
- Avaliar o processo e o grau de criatividade das soluções dadas pelo aluno.
- Encarar a avaliação como parte integrante do processo de ensino.
- Focalizar uma grande variedade de tarefas matemáticas e adotar uma visão global da Matemática.
- Propor situações-problema que envolvam aplicações de conjunto de idéias matemáticas.
- Propor situações abertas que tenham mais que uma solução.
- Propor que o aluno invente, formule problemas e resolva-os.
- Usar várias formas de avaliação, incluindo as escritas (provas, testes, trabalhos, auto-avaliação), as orais (exposições, entrevistas, conversas informais) e as de demonstração (materiais pedagógicos).
- Utilizar materiais manipuláveis, calculadoras e computadores na avaliação.

Menor ênfase

- Avaliar o que os alunos não sabem.
- Avaliar a memorização de definições, regras e esquemas.
- Avaliar apenas o produto, contando o número de respostas certas nos testes e provas.
- Avaliar contando o número de respostas certas nas provas, com o único objetivo de classificar.
- Focalizar um grande número de capacidades específicas e isoladas.
- Propor exercícios e problemas que requeiram apenas uma capacidade.
- Propor problemas rotineiros que apresentam uma única solução.
- Propor que o aluno resolva uma série de problemas já formulados.
- Utilizar apenas provas e testes escritos.
- Excluir materiais manipuláveis, calculadoras e computadores na avaliação.

Indicadores para a avaliação em Matemática

Como dissemos, este volume único contemplou algumas das atuais tendências em Educação Matemática. Elas dizem respeito a desenvolver um ensino que aumente o poder matemático do aluno por intermédio da resolução de problemas, valorizando a comunicação matemática, a construção e a compreensão de conceitos e procedimentos. Passamos, então, a exemplificar como avaliar tais capacidades:

Avaliando o poder matemático do aluno

É preciso avaliar o poder matemático do aluno, ou seja, a sua capacidade de usar a informação para raciocinar, pensar criativamente e para formular problemas, resolvê-los e refletir criticamente sobre eles.

A avaliação deve analisar até que ponto os alunos integraram e deram sentido à informação, se conseguem aplicá-la em situações que requeiram raciocínio e pensamento criativo e se são capazes de utilizar a Matemática para comunicar idéias. Além disso, a avaliação deve analisar a predisposição dos alunos em face dessa ciência, em particular a sua confiança em fazer Matemática e o modo como a valorizam.

Por exemplo, em uma situação-problema aberta como esta: "Elabore a maquete da escola a partir da sua planta", os alunos podem revelar o seu poder matemático.

Avaliando a resolução de problemas

Como a resolução de problemas deve constituir o eixo fundamental da Matemática escolar, o mesmo deve acontecer na avaliação. A capacidade dos alunos de resolver problemas desenvolve-se ao longo do tempo, como resultado de um ensino prolongado, de oportunidades várias para resolução de muitos tipos de problemas e do confronto com situações do mundo real.

Ao avaliar essa capacidade dos alunos é importante verificar se são capazes de resolver problemas não padronizados, de formular problemas a partir de certos dados, de empregar várias estratégias de resolução e de fazer a verificação dos resultados, bem como a generalização deles. Identificar lacunas é muito importante na elaboração de problemas. Por exemplo, em um problema do tipo: "Você vai comprar 10 itens no supermercado. Na fila do 'caixa expresso' (10 itens ou menos) estão seis pessoas. O caixa 1 tem uma pessoa na fila e o caixa 3 tem duas. Os outros caixas estão fechados. Para qual dos caixas você se dirigirá?", qual é a informação necessária para responder à pergunta? (É preciso saber o número de mercadorias que cada pessoa está comprando e a velocidade dos caixas.)

Generalizar soluções de problemas é outro ponto fundamental. Por exemplo, peça aos alunos que determinem qual é o valor de $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ (é 25); depois, proponha que eles formulem uma expressão que forneça a soma dos **n** primeiros números ímpares. A solução seria:

1 parcela: 1
2 parcelas: $1 + 3 = 4\ (2^2)$
3 parcelas: $1 + 3 + 5 = 9\ (3^2)$
4 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 = 16\ (4^2)$
5 parcelas: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25\ (5^2)$
$\vdots \qquad \vdots$
n parcelas: n^2

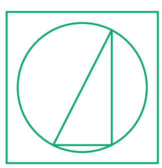
Outras informações a respeito de *resolução de problemas* podem ser obtidas no livro *Didática da resolução de problemas de Matemática*.

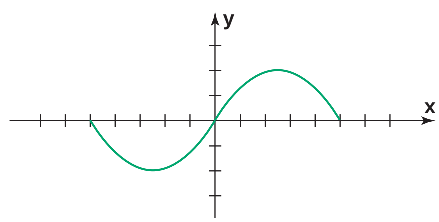
Avaliando a comunicação do aluno

Na sala de aula discutem-se idéias e conceitos matemáticos, partilham-se descobertas, confirmam-se hipóteses e adquire-se conhecimento matemático pela escrita, pela fala e pela leitura. O próprio ato de comunicar clarifica e organiza o pensamento e leva os alunos a envolverem-se na construção da Matemática. Como a Matemática utiliza símbolos e, portanto, tem uma linguagem própria, específica, às vezes a comunicação fica dificultada.

Ao avaliar a comunicação de idéias matemáticas pelos alunos, é preciso verificar se são capazes de expressar-se oralmente, por escrito, de forma visual ou por demonstrações com materiais pedagógicos; se compreendem e interpretam corretamente idéias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral ou visual e se utilizam corretamente o vocabulário matemático e a linguagem matemática para representar idéias, descrever relações e construir modelos da realidade. Veja a seguir um problema que envolve esses aspectos:

"Suponha que você esteja ao telefone falando com um colega de turma e quer que ele desenhe algumas figuras. Escreva as instruções de modo que seu colega consiga desenhar a figura e o gráfico exatamente como estão desenhados abaixo:"





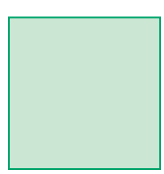
Avaliando o raciocínio do aluno

Para avaliar a capacidade de raciocínio matemático do aluno, é preciso verificar se ele identifica **padrões**, formula **hipóteses** e faz **conjecturas**. Por exemplo, peça que ele descubra como começaram e como continuam as seqüências:

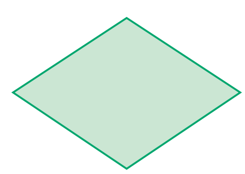
$$0, 3, 8, 15, 24, (35), (48), (63) \rightarrow (n^2 - 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{16}\right), \left(\frac{1}{32}\right), \left(\frac{1}{64}\right)$$

É preciso verificar ainda se ele **analisa** situações para identificar **propriedades comuns**. Por exemplo, o que há de comum entre o losango e o quadrado? E no que eles diferem?



Quadrado



Losango

E também se ele utiliza o **raciocínio espacial** ou **proporcional** para resolver problemas.

Por exemplo, peça ao aluno que desenhe um cubo planificado, ou que desenhe um cone montado a partir de um planificado. Para verificar o uso do raciocínio proporcional, pergunte: "Quantos alunos da escola usam óculos?". Isso leva os alunos a desenvolver um processo que permita identificar os que usam óculos de uma amostra de alunos e a utilizar raciocínio proporcional para determinar o número de alunos que usam óculos em toda a escola. Para aferir o raciocínio dedutivo, peça aos alunos que justifiquem por que, se somarmos o mesmo número de pontos à porcentagem de acertos no teste de cada aluno, a média das classificações aumentará a mesma quantidade.

Avaliando a compreensão de conceitos

A essência do conhecimento matemático são os conceitos. Os alunos só podem dar significado à Matemática se compreenderem os seus conceitos e significados.

A avaliação do conhecimento de conceitos e da compreensão deles pelos alunos deve indicar se são capazes de verbalizá-los e defini-los; identificá-los e produzir exemplos e contra-exemplos; utilizar modelos, diagramas e símbolos para representar conceitos; passar de uma forma de representação para outra; reconhecer vários significados e interpretações de um conceito; comparar conceitos e integrá-los.

Para identificar exemplos e contra-exemplos de conceitos, apresente uma questão como esta:

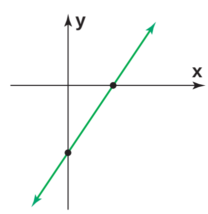
"Quais das seguintes expressões representam números racionais?

$$\frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{4}{5}} \qquad 0 \qquad \sqrt{5} \qquad 1{,}3434 \qquad -5{,}6$$

$$1{,}121121112... \qquad \sqrt{-16} \qquad \frac{-6}{-2} \qquad 25\%"$$

Para reconhecer condições que determinam um conceito, proponha que o aluno faça uma classificação dos quadriláteros (4 lados). Ao separar os paralelogramos (2 pares de lados paralelos) dos trapézios (apenas 1 par de lados paralelos), o aluno demonstra que sabe identificar essas formas geométricas pelas suas propriedades. Na continuação, pode separar os retângulos (4 ângulos retos) dos losangos (4 lados de mesma medida) e incluir os quadrados (4 ângulos retos e 4 lados de mesma medida) nos losangos, demonstrando compreensão dos conceitos de quadrado, losango, retângulo, paralelogramo e quadrilátero.

Para passar de uma representação de um conceito para outra, peça por exemplo que o aluno escreva a equação da reta:



A integração de conceitos pode ser trabalhada com atividades do tipo: "Una os pontos médios dos lados de um trapézio isósceles. Qual figura se obtém? Justifique sua resposta".

Avaliando procedimentos matemáticos

Procedimentos matemáticos são, por exemplo, os **algoritmos** ou as **técnicas de cálculo**, são as **maneiras para traçar** retas paralelas, perpendiculares, ângulos, etc.

A avaliação do conhecimento de procedimentos dos alunos deve indicar se são capazes de executar uma atividade matemática com confiança e eficiência; de justificar os passos de um procedimento, reconhecer se ele é adequado ou não a determinada situação e se funciona ou não; e, sobretudo, se são capazes de criar novos procedimentos corretos e simples.

Para verificar se o aluno conhece as razões dos passos de um procedimento, peça por exemplo que ele justifique cada passagem da multiplicação $(x + 3)(x + 2)$:

$$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Para verificar se o resultado de um procedimento está correto, proponha, por exemplo, que o aluno inverta a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e verifique se o resultado é realmente a inversa dela.

Como ver o erro do aluno em Matemática

Muito se aprende por tentativas e erros, por aproximações sucessivas e aperfeiçoamentos. Por isso, os erros cometidos pelo aluno devem ser vistos naturalmente como parte do processo ensino-aprendizagem; e, na maioria das vezes, é possível usá-los para promover uma aprendizagem mais significativa. Para isso, é fundamental que o professor analise o tipo de erro cometido pelo aluno. Ao fazer isso, poderá perceber quais foram, de fato, as dificuldades apresentadas e, assim, reorientar sua ação pedagógica com mais eficácia para saná-las.

Por exemplo, são freqüentes os erros na execução do algoritmo da subtração. Ao fazer 135 – 68, o aluno erra porque não colocou os algarismos das unidades, das dezenas, etc. de um número em correspondência aos mesmos algarismos do outro número, ao "armar" o algoritmo, ou porque subtraiu 5 de 8 e 3 de 6, pensando numa orientação geral que recebeu: "subtraia sempre o menor do maior", ou porque se equivocou nos cálculos, ou porque não compreendeu as idéias associadas à subtração (tirar e comparar), ou porque se distraiu, etc.

O ato de mostrar ao aluno onde, como e por que ele cometeu o erro ajuda-o a superar lacunas de aprendizagem e equívocos de entendimento.

Com o repertório de todos os erros mais freqüentes cometidos pelos alunos, o professor, ao trabalhar aquele assunto, saberá chamar a atenção para os pontos mais críticos e, com isso, diminuir a possibilidade de erro.

5. Informações úteis ao professor para sua formação continuada

A importância da atualização

Todos nós, professores, sabemos que é extremamente importante estarmos sempre atualizados, especialmente porque o mundo está em constantes e rápidas mudanças.

Estamos sempre aprendendo coisas novas, quer com o aluno na nossa própria vivência de sala de aula, quer consultando grupos de estudos e pesquisas ou publicações (livros, revistas, jornais, etc.), ou ainda trocando idéias e experiências em cursos, encontros, congressos, etc.

Tudo isso é o que hoje chamamos **formação continuada** do professor, ou seja, seu diploma é apenas um primeiro estágio da sua formação.

Entretanto, nem sempre o professor tem informações precisas sobre onde e como obter orientações para o seu trabalho no dia-a-dia. Há no país muitos grupos estudando e pesquisando o ensino e a aprendizagem da Matemática (Educação Matemática) e que realizam cursos, palestras e orientações técnicas para professores. Há também muitas publicações dessa área que podem auxiliar o trabalho diário do professor com os alunos.

Com quem se comunicar?

A seguir estão alguns endereços, em ordem alfabética, pelos quais você poderá se comunicar com esses grupos e obter as publicações, para se integrar nesse movimento nacional de melhoria da qualidade do ensino da Matemática e para saber que não está só nessa difícil, mas gratificante, tarefa de trabalhar prazerosamente as primeiras idéias matemáticas com as crianças e os jovens.

Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática — CAEM
Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP
Rua do Matão, 1010 — Bloco B — Sala 167
Cidade Universitária
CEP 05508-900 — São Paulo–SP
Tel.: 0(XX)11 818-6160
Fax: 0(XX)11 814-4135
Informe-se sobre cursos, palestras e publicações.

Centro de Ciências de Minas Gerais — Cecimig
Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação — Cidade Universitária
Avenida Presidente Antônio Carlos, 6227
CEP 31270-010 — Belo Horizonte–MG
Informe-se sobre cursos e publicações.

Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática — Cepem
Faculdade de Educação — Unicamp
Sala 1103 — Caixa Postal 6120
CEP 13081-970 — Campinas–SP
Informe-se sobre pesquisas e publicações.

Curso de Pós-graduação em Educação Matemática
IGCE/Unesp — Campus de Rio Claro
Caixa Postal 178 — CEP 13500-230
Rio Claro–SP
Telefax: 0(XX)19 534-0123
Informe-se sobre cursos, revistas e pesquisas já realizadas.

Faculdade de Educação — USP
Departamento de Metodologia
Avenida da Universidade, 308
CEP 05508-900 — São Paulo–SP
Tel.: 0(XX)11 818-3517
Fax: 0(XX)11 818-3149
Informe-se sobre cursos e publicações.

Furb — Departamento de Matemática
Rua Antônio da Veiga, 140
Caixa Postal 1507 — CEP 89010-971
Blumenau–SC — Tel.: 0(XX)47 321-0200
Fax: 0(XX)47 322-8818

Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática — Gepem
Universidade Santa Úrsula
Rua Fernando Ferrari, 75 — Prédio VI
Sala 1105 — Botafogo
CEP 22231-040 — Rio de Janeiro–RJ
Tel.: 0(XX)21 551-5542
Fax: 0(XX)21 551-6446
Informe-se sobre cursos e publicações.

Laboratório de Ensino de Matemática
Universidade Estadual de Campinas
Unicamp — Imecc
Caixa Postal 6065 — CEP 13082-970
Campinas–SP
Tel.: 0(XX)19 788-8410
Fax: 0(XX)19 239-5808
Informe-se sobre cursos e palestras.

Laboratório de Ensino de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática
Cidade Universitária — CEP 50730-540
Recife–PE
Tel.: 0(XX)81 271-8411
Fax: 0(XX)81 271-1833
Informe-se sobre cursos e publicações.

Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática — Leacim
Universidade Federal do Espírito Santo
Campus de Goiabeiras
Avenida Fernando Ferrari, s/n
CEP 29060-900 — Vitória–ES
Tel.: 0(XX)27 335-2474
Fax: 0(XX)27 335-2460
Informe-se sobre cursos e publicações.

LRDante Palestras, Cursos e Assessoria Técnica em Educação Matemática S/C Ltda.
Avenida 48 Particular, 55 — Bairro Santana
CEP 13504-055 — Rio Claro–SP
Telefax: 0(XX)19 524-2494
Informe-se sobre palestras, cursos e orientações técnicas.

Mestrado em Educação Matemática — PUC–SP
Rua Marquês de Paranaguá, 111
CEP 01303-050 — São Paulo–SP
Tel.: 0(XX)11 256-1622
Informe-se sobre publicações e pesquisas.

Mestrado em Educação Matemática
Universidade Santa Úrsula
Rua Fernando Ferrari, 75 — Prédio VI
Sala 1105 — Botafogo
CEP 22231-040 — Rio de Janeiro–RJ
Tel.: 0(XX)21 551-5542
Fax: 0(XX)21 551-6446
Informe-se sobre cursos e pesquisas já realizadas.

Projeto Fundão–Matemática
UFRJ — Instituto de Matemática
Caixa Postal 68530 — CEP 22295-900
Rio de Janeiro–RJ
Tel.: 0(XX)21 260-1884
Fax: 0(XX)21 290-1095
Informe-se sobre cursos e publicações.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática — SBEM
Caixa Postal 11236 — CEP 05422-970
São Paulo–SP
Tel.: 0(XX)11 814-0849
Informe-se sobre as publicações, o endereço dessa sociedade em seu estado e como se tornar sócio.

Sociedade Brasileira de Matemática — SBM
Estrada Dona Castorina, 110
CEP 22460-320 — Rio de Janeiro–RJ
Tel.: 0(XX)21 529-5275 ou 529-5011
Informe-se sobre publicações e sobre como se tornar sócio.

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Teoria e Prática de Ensino
Rua General Carneiro, 460 — Edifício D. Pedro I
CEP 80060-000
Curitiba–PR — Tel.: 0(XX)41 362-3038
Ramal 2278
Informe-se sobre cursos.

ALGUNS ÓRGÃOS GOVERNAMENTAIS

Ministério da Educação e do Desporto — MEC
Secretaria de Educação Média e Tecnológica
Esplanada dos Ministérios — Bloco L — 4º andar
Sala 400
CEP 70047-900 — Brasília–DF
Tel.: 0(XX)61 410-8644
Fax: 0(XX)61 225-3474
Informe-se sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e todas as questões relacionadas com o Ensino Médio.

Secretaria de Educação a Distância
Esplanada dos Ministérios — Bloco L
Anexo 1 — Sala 327
CEP 70047-902 — Brasília–DF
Tel.: 0800-61-6161
Informe-se sobre os programas da TV Escola e publicações.

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo
Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas — CENP
Praça da República, 53 — Centro
CEP 01045-903 — São Paulo–SP
Tel.: 0(XX)11 255-4077 — Ramal 142
Informe-se sobre as várias publicações de Matemática para o nível médio.

Secretaria de Estado da Educação do Rio Grande do Sul — Centro de Ciências do Rio Grande do Sul — Cecirs
Praça Piratini, 76 — Bloco B — 3º andar
CEP 90042-970
Porto Alegre–RS — Tel.: 0(XX)51 223-3426
Fax: 0(XX)51 225-8626
Informe-se sobre cursos e publicações.

Secretarias de Educação estaduais e municipais
Provavelmente a Secretaria de Educação do estado em que você mora e também a do seu município mantêm equipes pedagógicas e publicações e oferecem cursos de Matemática a professores. Procure se informar e participar.

6. Referências bibliográficas para o professor

Sobre conteúdos

ÁVILA, Geraldo. *Introdução às funções e à derivada*. São Paulo, Atual.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa.

Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). 12 v.

Coleção Matemática: aprendendo e ensinando. Vários autores, São Paulo, Atual/MIR. Vários volumes.

DAVIS, Philip J. & HERSH, R. *A experiência matemática*. Introdução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro, Francisco Alves.

LIMA, Elon Lages et alii. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). 2 v. (Coleção do Professor de Matemática.)

PITOMBEIRA, João Bosco, coord. *Telecurso 2000 — 1º e 2º graus — Matemática*. Rio de Janeiro, Globo.

Revista do Professor de Matemática. SBM. (Para assiná-la, escreva para Caixa Postal 66281 — CEP 05389-970, São Paulo, SP.)

Sobre metodologia do ensino da Matemática

ADLER, Irving. *Matemática e desenvolvimento mental*. São Paulo, Cultrix.

AEBLI, Hans. *Didática psicológica*; aplicação à didática da psicologia de Jean Piaget. Rio de Janeiro, Nacional.

CARRAHER, Terezinha. *Aprender pensando*. Rio de Janeiro, Vozes.

______ et alii. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo, Cortez.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do ensino da Matemática*. São Paulo, Cortez.

CONVERSA de professor — Matemática. *Cadernos da TV Escola* — MEC/SED.

COXFORD, Arthur F. & SHULTE, Albert P., orgs. *As idéias da Álgebra*. São Paulo, Atual.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática*. São Paulo, Summus/Unicamp.

______. *Eletromagnética*. São Paulo, Ática.

DANTE, Luiz Roberto. Algoritmos e suas implicações educativas. *Revista de Ensino de Ciências*. São Paulo, Funbec. v. 12.

______. *Criatividade e resolução de problemas*. Tese de livre-docência, Unesp-Rio Claro-SP (mimeografado).

______. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo, Ática.

______. *Incentivando a criatividade através da educação matemática*. Tese de doutorado. PUC-SP (mimeografado).

______. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino da Matemática. *Revista do professor de Matemática*. São Paulo, SBM. v. 6.

KOETHE, S. *Pensar é divertido*. São Paulo, Herder.

LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P., orgs. *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo, Atual.

LOVELL, Kurt. *O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança*. Porto Alegre, Artes Médicas.

MACEDO, Lino de. *A importância dos jogos para a construção do conhecimento na escola* (mimeografado).

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e didática*. São Paulo, Cortez.

______. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. São Paulo, Cortez/Autores Associados.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da Matemática*. São Paulo, Ática.

PARRA, Cecília & SAIZ, Irma, orgs. *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre, Artes Médicas.

PIRES, Célia M. C. *Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede*. Tese de doutorado. Faculdade Educativa — USP-SP (mimeografado).

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência.

Proposta curricular para o ensino da Matemática — 2º grau. São Paulo, SEE-CENP.

RATHS, Louis E. *Ensinar a pensar: teoria e aplicação*. São Paulo, EPU.

Revista A Educação Matemática em Revista. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo.

Revista Nova Escola. São Paulo, Fundação Victor Civita.

ZUNINO, Delia Lerner. *A Matemática na escola*. Porto Alegre, Artes Médicas.

Sobre história da Matemática

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher/Edusp.

Coleção Tópicos de história da Matemática — Para uso em sala de aula. Atual. Vários volumes.

GUELLI, Oscar. *Coleção Contando a história da Matemática*. São Paulo, Ática. Vários volumes.

IFRAH, Georges. *Os números;* a história de uma grande invenção. Globo.

STRUIK, Dirk J. *História concisa da Matemática*. Lisboa, Gradiva.

Sobre desafios, quebra-cabeças e jogos

Coleção O prazer da Matemática. Vários autores. Lisboa, Gradiva. Vários volumes.

OBERMIR, Gilbert. *Quebra-cabeças, truques e jogos com palitos de fósforos*. Rio de Janeiro, Ediouro.

Revista Globo Ciência. Globo.

Revista Superinteressante. São Paulo, Abril.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava. As maravilhas da Matemática. Os números governam o mundo. Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro, Record, Bloch e Ediouro.

Parte II

1. Descrição do livro do aluno

Este volume único é composto de algumas páginas introdutórias (Apresentação e Sumário; este permite ao aluno localizar facilmente todos os assuntos), 43 capítulos organizados em 9 unidades, questões do Enem de 1998 e 1999, 300 questões dos vestibulares mais recentes e respostas de todos os exercícios ao final de cada unidade.

As 8 unidades e os respectivos capítulos são: *Unidade 1 – Álgebra (I)*: Capítulo 1: Cálculo numérico e algébrico; Capítulo 2: Conjuntos e conjuntos numéricos; Capítulo 3: Funções; Capítulo 4: Função afim; Capítulo 5: Função quadrática; Capítulo 6: Função modular; Capítulo 7: Função exponencial; Capítulo 8: Logaritmo e função logarítmica; Capítulo 9: Progressões; *Unidade 2 – Geometria plana*: Capítulo 10: Semelhança de triângulos; Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo; Capítulo 12: Polígonos regulares inscritos na circunferência e comprimento da circunferência; Capítulo 13: Áreas: medidas de superfícies; *Unidade 3 – Trigonometria*: Capítulo 14: Trigonometria no triângulo retângulo; Capítulo 15: Resolução de triângulos quaisquer; Capítulo 16: Conceitos trigonométricos básicos; Capítulo 17: Funções trigonométricas; Capítulo 18: Relações, equações e inequações trigonométricas; Capítulo 19: Transformações trigonométricas; *Unidade 4 – Estatística e Matemática financeira*: Capítulo 20: Noções básicas de Estatística; Capítulo 21: Noções de Matemática financeira; *Unidade 5 – Álgebra (II)*: Capítulo 22: Matrizes; Capítulo 23: Determinantes; Capítulo 24: Sistemas lineares; Capítulo 25: Análise combinatória; Capítulo 26: Probabilidade; *Unidade 6 – Geometria espacial: de posição e métrica*: Capítulo 27: Geometria espacial de posição – uma introdução intuitiva; Capítulo 28: Poliedros: prismas e pirâmides; Capítulo 29: Corpos redondos: cilindro, cone e esfera; *Unidade 7 – Geometria analítica*: Capítulo 30: Geometria analítica: ponto e reta; Capítulo 31: Geometria analítica: circunferência; Capítulo 32: Geometria analítica: secções cônicas; *Unidade 8 – Álgebra (III)*: Capítulo 33: Números complexos; Capítulo 34: Polinômios e equações algébricas.

2. Observações sobre os conteúdos

O capítulo 1, Cálculo numérico e algébrico, apresenta questões e exercícios com o objetivo de revisar alguns conceitos e procedimentos estudados no Ensino Fundamental.

Como toda a Matemática pode ser formulada na linguagem dos conjuntos, introduz-se essa linguagem e a notação no capítulo 2. Os números e o espaço são os objetos mais estudados em Matemática; daí a grande importância dos conjuntos numéricos e dos conjuntos de pontos (figuras geométricas). A ampliação dos campos numéricos (dos naturais aos complexos) deve levar em conta problemas que envolvem medições, estimativas, arredondamentos, porcentagens, notação científica, etc. Na introdução dos números irracionais, é interessante associá-los à geometria e às medidas (medir a diagonal do quadrado de lado 1, usando como unidade o lado desse quadrado); na introdução dos números complexos, associá-los à re-solução de equações. Por exemplo, a equação $x^3 - 8 = 0$ pode ser escrita na forma
$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$, e suas três raízes são: $x = 2$, $x = -1 + i\sqrt{3}$ e $x = -1 - i\sqrt{3}$.

No trabalho com funções é importante observar que foi dado o tratamento de dependência entre duas variáveis (por exemplo, número de litros de gasolina e preço a pagar: o preço a pagar é *dado em função* da quantidade de litros que se coloca no carro), e não se apresentou a função como caso particular de uma *relação*. A ênfase deve ser dada nos gráficos das funções e nas propriedades observadas a partir dos gráficos.

Como as funções constituem a linguagem pela qual os fenômenos das ciências naturais são expressos, a interdisciplinaridade aparece nesse momento de modo marcante (ver os próximos dois itens desta *parte específica*).

Além das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, é interessante exemplificar também como casos de função as seqüências (PA e PG) — $f: \begin{array}{l} \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{R} \\ \;\; i \;\mapsto a_i \end{array}$; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — e as funções polinomiais $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 6$.

Ao estudar a função afim, cujo gráfico é uma reta não-paralela ao eixo vertical, é possível dar uma iniciação à Geometria analítica (equação da reta que passa por dois pontos, coeficiente angular da reta, etc.). O mesmo ocorre em relação à função quadrática, cujo gráfico é uma parábola: estuda-se diretriz, foco, etc.

As progressões aritméticas constituem a ferramenta matemática para estudar as grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais; já as progressões geométricas são um instrumento matemático criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante.

Uma retomada intuitiva da Geometria plana do Ensino Fundamental é feita nos capítulos 10, 11, 12 e 13, enfocando conceitos e procedimentos fundamentais desse assunto.

Quanto à Trigonometria, iniciamos com o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os elementos do triângulo (três lados e três ângulos) desconhecidos quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado. Depois, estudamos as noções de seno e cosseno, e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, como funções reais de uma variável real — são as chamadas funções trigonométricas. Exemplo: a função sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que leva o número real **x** a outro número real sen x. Uma característica importante das funções trigonométricas é que elas são periódicas e, portanto, constituem modelos matemáticos adequados para os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, como batimentos cardíacos, som, corrente elétrica alternada, movimento dos planetas, etc.

Atualmente, na Matemática avançada (análise de Fourier), as funções trigonométricas têm grande importância, uma vez que Fourier mostrou, em 1822, que qualquer função periódica pode ser expressa em termos de funções trigonométricas seno e cosseno.

A Estatística, atualmente, é uma das principais ferramentas que possibilitam ler e interpretar o mundo à nossa volta. A coleta de dados, a elaboração e a interpretação de tabelas e gráficos, as inferências e as predições tomam conta de qualquer atividade humana. Este capítulo procura trabalhar esses assuntos de maneira contextualizada e interdisciplinar.

A Matemática financeira estuda basicamente empréstimo, juros e taxas de juros. Se **C** é o capital, **j** são os juros gerados pelo empréstimo do capital e a razão $i = \frac{j}{C}$ é a taxa de crescimento do capital (taxa de juros), sempre referida ao período da operação. Esse tema, por si só, constitui um excelente instrumento matemático de contextualização, conforme pode ser observado nos problemas do capítulo.

O estudo das matrizes, dos determinantes e sistemas é feito nos capítulos 22 a 24. As matrizes e os determinantes são ferramentas úteis na discussão e resolução de sistemas lineares. Os sistemas lineares são modelos matemáticos adequados para estudar vários conteúdos de outras disciplinas, como balanceamento de reações químicas, etc. (ver item 11 desta parte). O estudo dos sistemas de inequações lineares leva à solução de importantes problemas de programação linear.

O estudo da análise combinatória e do binômio de Newton (capítulo 25) foi feito por meio de problemas, evitando-se o excesso de fórmulas e casos particulares. É importante que a ênfase seja dada ao princípio básico da contagem, que é o princípio multiplicativo: se há **x** possibilidades de se tomar uma decisão e, tomada essa decisão, há **y** possibilidades de tomar uma segunda decisão, então o número de maneiras de tomar as duas decisões em seqüência é xy. Por exemplo, se há dois tipos de sorvete, de palito e de casquinha, e há três sabores (chocolate, morango e pistache), então há $2 \cdot 3 = 6$ possibilidades de se decidir qual sorvete pedir. Em todo o capítulo, buscou-se trabalhar situações-problema contextualizadas, próximas ao cotidiano do aluno.

O capítulo de probabilidade estuda as *experiências aleatórias*, ou seja, aquelas que, repetidas sob as mesmas condições, produzem geralmente resultados diferentes. Por exemplo, os lançamentos de moedas, dados, etc.

O conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória chamamos de *espaço amostral*. Os subconjuntos do espaço amostral são chamados de *eventos*. Por exemplo, no lançamento de uma moeda, o espaço amostral é $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$ e há 4 eventos: $\varnothing$, $A = \{\text{cara}\}$, $B = \{\text{coroa}\}$ e $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$. Se colocamos que a probabilidade de ocorrer o evento $e\big(p(E)\big)$ é dada por $p(E) = \dfrac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de possíveis resultados}}$, temos $p(\varnothing) = 0$; $p(A) = p(\text{cara}) = 0{,}5$; $p(B) = p(\text{coroa}) = 0{,}5$ e $p(\Omega) = 1$, o que satisfaz a definição formal de probabilidade: uma função que associa a cada evento **E** um número p(E), tal que:

- para todo evento **E**, $0 \leqslant p(E) \leqslant 1$;
- $p(\Omega) = 1$;
- se E_1 e E_2 são dois eventos que não podem ocorrer simultaneamente, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, então $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

O enfoque dado a esse capítulo também foi o de desenvolvê-lo por meio de situações-problema contextualizadas.

A Geometria espacial é estudada na Unidade 6 (capítulos 27 a 29). Nesse estudo, não partimos de definições, mas de objetos concretos encontrados no dia-a-dia, fazendo o reconhecimento das formas mais freqüentes e familiarizando o aluno com a nomenclatura básica. As posições relativas e propriedades de objetos geométricos são estudadas, bem como as relações entre figuras planas e espaciais. Nessa fase, é também muito importante fazer a análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais por meio de desenhos, planificações e construções. A Geometria métrica como cálculo de distâncias, áreas e volumes também foi contemplada. Uma pequena introdução ao sistema dedutivo, com a demonstração de alguns teoremas, foi apresentada com o objetivo de mostrar ao aluno o sentido e o valor de uma demonstração.

A Geometria analítica ou Geometria das coordenadas é de fundamental importância para a Matemática e para as outras ciências. Ela permite estudar os problemas geométricos de modo algébrico, por meio de equações, e vice-versa. Todos os problemas de localização podem ser estudados pela Geometria analítica; por exemplo, localiza-se um veículo numa rodovia fornecendo o número do marco de quilometragem; localiza-se um ponto no mapa fornecendo sua latitude e longitude (suas coordenadas geográficas); localiza-se um avião no espaço fornecendo sua latitude, longitude e altitude, etc. É interessante relacionar esses três capítulos com o que já foi estudado anteriormente sobre funções afins e quadráticas.

Na introdução dos números complexos é importante associá-los à resolução de equações; por exemplo, a equação $x^3 - 8 = 0$ pode ser escrita na forma $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$, e suas três raízes (uma real e duas complexas) são $x = 2$, $x = -1 + i\sqrt{3}$ e $x = -1 - i\sqrt{3}$. Nesse tópico, é interessante fazer uso da história da Matemática para mostrar como tais números foram inicialmente concebidos e quais problemas motivaram seu aparecimento.

O último capítulo é destinado ao estudo dos polinômios e das equações algébricas. É importante ressaltar ao aluno que toda equação polinomial tem pelo menos uma raiz complexa e que, embora até a equação do 2º grau tenhamos fórmulas e procedimentos práticos e imediatos para resolvê-las, o mesmo não ocorre para equações polinomiais de grau maior do que dois.

3. Identificação em cada capítulo dos problemas que envolvem contextualização, interdisciplinaridade e integração com outros temas matemáticos

O quadro a seguir foi criado para permitir a rápida localização, no livro-texto, dos trechos em que aparecem contextualização, interdisciplinaridade e integração com outros temas matemáticos. As legendas significam:

E = Exemplo

EP = Exercício proposto

ER = Exercício de revisão

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
2 – Conjuntos e conjuntos numéricos	11	Introdução	A noção de conjunto – Geografia	
	13			Subconjuntos – Quadriláteros
	14			EP 11 – Quadriláteros
	16			E – Quadriláteros EP 23 – Geometria de posição – Contra-positiva
	18	EP 33		EP 32 – Quadriláteros
	19	E 1, E 2		
	20	EP 35, 36, 37, 38	EP 36 – Literatura	
	21	EP 39, 40, 41, 42, 43		
	23			Conjunto dos números irracionais – Relação de Pitágoras
	27	ER 62, 63, 67	ER 62 – Biologia	

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
3 – Funções	28	E 1	E 4 – Física	E 2 – Geometria
	29	EP 3, 4		EP 1, 2 – Geometria
	32	E 1		E 2 – Geometria
	33	EP 13		EP 14, 15, 16 – Geometria
	34	EP 27, 28		
	35	E 1, 2		
	36	E 3, EP 30		
	37	EP 31		
	39			EP 40 – Geometria
	51			EP 62, 63, 64 – Seqüências; EP 65 – PA; EP 66 – PG
	52	ER 70, 74	ER 70 – Ecologia; ER 74 – Física	
4 – Função afim	53	Introdução		
	55	EP 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14	EP 12 – Biologia; EP 14 – Física	EP 6 – Geometria; EP 11 – Porcentagem
	56	EP 15, 16	EP 15 – Biologia; EP 20, 21, 22, 23 – Física	EP 17, 18, 19 – PA
	57		EP 24, 25, 26, 27 – Física	
	59	EP 31	EP 30, 37 – Física	
	60		EP 38 – Física	
	61	Estudo do sinal da função afim		
	64	EP 50, 54, 55		
	65	EP 56, 57, 58		
	66		EP 61 – Física; Regra de três – Física	EP 59, 60, 62 – Geometria
	67	EP 63, 64, 65, 68; Desafio; ER 69, 70	EP 64, 65 – Física	
	68	ER 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78	ER 72, 74, 77 – Física; ER 78 – Biologia	
	69	ER 79, 81, 82, 83, 84	ER 82 – Biologia	

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
5 – Função quadrática	70	Introdução		Situações em que aparece a função quadrática – Geometria
	72	EP 4, 7, 9	EP 4, 7, 8 – Física	EP 5, 6 – Geometria
	76	EP 27, 28		EP 29, 30 – Geometria
	77	EP 31, 34, 35, 36, 37	EP 35, 37 – Física	EP 32, 33 – Geometria
	80	E 4		
	81	E 5		
	82	EP 58, 59, 60, 61, 62	EP 60 – Física	EP 59 – Geometria
	91		E 1 – Física	
	92		E 2, E 3 – Física	
	93		EP 98, 99, 100 – Física	
	94	EP 105, 106, 107, 108, 109		EP 101, 102, 103, 104 – PA
	95	ER 110, 111, 113, 117, 118, 119, 120, 121	ER 113, 120 – Física	
	96	ER 122, 126	ER 126 – Biologia	
	97	ER 130, 131, 132	ER 132 – Física	
6 – Função modular	106		Uma aplicação do módulo na Física EP 28 – Física	
7 – Função exponencial	108		Introdução – Biologia	
	112	EP 12	Notação científica – Física	
	116			EP 42, 43 – Sistemas
	119			Aplicação – Matemática financeira; EP 55, 56 – PA e PG; EP 57 – Matemática financeira
	120	E 1, 2, 3	E 1 – Biologia; E 3 – Química	E 2 – Matemática financeira
	121	EP 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67	EP 58, 62, 67 – Biologia; EP 63, 64, 65, 66 – Química	EP 60 – Matemática financeira
	122	ER 73, 76		
	123	ER 84, 85, 86, 87, 88	ER 85, 88 – Biologia	ER 83 – Conjuntos; ER 86, 87 – Matemática financeira

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
8 – Logaritmo e função logarítmica	124	Logaritmo		
	129	2ª observação – calculadora		
	130	Calculadora	Introdução – Química	
	131	EP 34, 35	EP 34 – Química	
	132		E 2 – Biologia; E 3 – Química; E 4 – Geografia	
	133	EP 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56	EP 49, 51 – Química; EP 50 – Biologia; EP 52 – Geografia	EP 53, 54, 55, 56 – Matemática financeira
	140		EP 81, 83 – Biologia; EP 82 – Química	
	141	ER 86, 87, 88, 89	EP 84 – Química; ER 86, 88 – Biologia	
	142	ER 91, 92, 93, 94, 95	ER 93 – Geografia; ER 94 – Química; ER 95 – Biologia	
9 – Progressões	143	Introdução		
	144			EP 5 – Números triangulares
	145	EP 8, Introdução		EP 6 – Números primos
	147	E 6, 7	E 6 – Física	
	148	EP 24, 25		EP 16, 23, 27 – Geometria; EP 25 – Matemática financeira
	149	Introdução		
	150	E 1		
	151	EP 43, 44, 45, 46, 51, 52	EP 43, 44 – Física	EP 47, 49, 50, 53 – Geometria
	152	Introdução		
	153	E 4, 5		
	154	EP 61, 62	EP 61 – Biologia	
	155	E 1, 5		
	156			E 6 – Matemática financeira
	157	EP 85, 95, 96	EP 96 – Geografia	EP 94 – Geometria; EP 95 – Matemática financeira
	158	EP 97, 98, 100, 101		EP 97, 101 – Matemática financeira
	159	E 1, 2; EP 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108	E 2; EP 103, 108 – Geografia; EP 102, 104 – Biologia	
	161	EP 117, 118		
	162			E 1 – Números racionais

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
9 – Progressões *(continuação)*	163	EP 125		E 4; EP 124, 126 – Geometria; EP 123 – Números racionais
	164			E 2, 3 – Matemática financeira
	165	EP 131, 132, 133, 134, 135, 136	EP 135 – Biologia	EP 136, Desafio – Matemática financeira
	166	ER 138, 139, 143		ER 141 – Equação do 2º grau
	167	ER 146, 150		ER 145 – Potências; ER 151 – Geometria
	168	ER 156, 157		
10 – Semelhança de triângulos	170	Introdução		
	171	E 2; EP 3		
	173	EP 9		
	174	EP 12, 13		
	175	ER 16		
11 – Relações métricas no triângulo retângulo	176	Introdução		
	177	E 2; EP 6, 7	E 2, EP 6 – Física	
	178	Desafio; ER 15		
	179	ER 21		
12 – Polígonos regulares inscritos na circunferência e comprimento da circunferência	181	EP 7, 8		
	182	ER 12, 13, 14, 15, 18		
13 – Áreas: medidas de superfícies	183	Introdução		
	188	Exemplo		
	189	EP 1, 3, 6, 7, 9, 12		
	190	EP 13, 14, 20		
	192	EP 21, 22, 23		EP 23 – História da Matemática
	193	EP 26, 29, 33		
	195	EP 37, 39, 40, 41, 43		EP 37, 42 – Porcentagem
	196	EP 44, 45; ER 46, 49		
	197	ER 50, 52, 54, 55		
	198	ER 60, 62, 63, 64		ER 58 – Seqüências; ER 63 – Porcentagem; ER 64 – Funções

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
14 – Trigonometria no triângulo retângulo	199	Introdução		
	200	EP 1, 2, 3, 4, 5		
	205	E 1		
	206	E 2, 3, 4		
	207	E 5; EP 11, 12		
	208	EP 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19		
	209	EP 21, 22, 25, 26	EP 23 – Física	EP 24 – História da Matemática
	210	ER 30, 31, 32, 33	EP 27, 28, 29 – Física	
	211	ER 34, 35, 36, 38	ER 34 – Física	
	212	ER 39, 41	ER 40, 42, 43 – Física	
15 – Resolução de triângulos quaisquer	215	Lei dos senos		
	217	E 1		
	218	EP 7; Lei dos cossenos		
	220	E 1		
	221	EP 18, 19	EP 14 – Física	
	222	Desafio; ER 20	Desafio – Física	
	223	ER 28, 29, 30, 31, 32	ER 26, 27 – Física	
16 – Conceitos trigonométricos básicos	227	E 7; EP 5, 6		
	231	EP 16, 17; Desafio	Desafio – História	
	232	ER 19, 20, 21, 22, 23		ER 21 – História da Matemática
	233	ER 27, 28, 29, 30, 31		
17 – Funções trigonométricas	238			EP 8 – Inequações
	242			EP 20 – Inequações
	252			ER 46 – Conjuntos; ER 48 – Inequações
18 – Relações, equações e inequações trigonométricas	260	EP 25		EP 24 – Geometria
19 – Transformações trigonométricas	268			EP 16, 17 – Rotação
	269			E 2 – Produtos notáveis; E 4 – Geometria
	272		Desafio – Física	EP 43 – Sistemas

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
20 – Noções básicas de Estatística		A contextualização existe em praticamente todos os exemplos e exercícios desse capítulo		Estatística e probabilidade
21 – Noções de Matemática financeira		A contextualização existe em praticamente todos os exemplos e exercícios desse capítulo		Juros e funções
22 – Matrizes	308	Introdução		
	309	EP 1		
	316	Multiplicação de matrizes		
	318	EP 48		
	321	E 1		
	322	E 2		
	323	EP 66, 67, 68, 69, 70; Desafio; ER 72	EP 66, 67, 68, 69, 70; Desafio – Computação	
	324	ER 76, 78, 79		
23 – Determinantes	326			EP 1g, h – Trigonometria; EP 1i – Logaritmos
	327			EP 7, 12 – Valor numérico; EP 14 – Inequações; EP 16, 17 – Trigonometria
	333			Desafio – Geometria
	334			ER 44, 45, 46 – Trigonometria
24 – Sistemas lineares	335	Introdução		
	337			E 1 – Geometria
	338			E 2, 3; EP 8 – Geometria
	341			1ª, 2ª, 3ª e 4ª possibilidade – Geometria
	342			5ª, 6ª e 7ª possibilidade – Geometria
	343			8ª possibilidade – Geometria
	351		E 1 – Química	

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
24 – Sistemas lineares *(continuação)*	352	EP 42, 43, 44	E 2 – Química	
	353	EP 45, 46; Programação linear – o método gráfico		
	354	E 2, 3		
	355	EP 49		
	356	ER 50, 51, 52, 53, 54, 55		
	357	ER 56, 57, 58, 59, 60, 61	ER 58 – Química	
	358	ER 62, 63, 64, 65, 66, 67	ER 64 – Química; ER 66 – Física	
25 – Análise combinatória	359	Introdução; E 1		
	360	E 2, 3		
	361	EP 1, 2, 3, 4	E 2 – Português	
	362		EP 8, 12 – Português	
	365	E 3, 6		E 4 – Frações
	366	EP 21, 23, 25, 26, 29, 30; E 1		
	367	E 2		
	368	E 5, 6, 7		E 3, 4 – Geometria
	369	EP 34, 35, 37, 38, 39, 40		EP 36 – Geometria
	370	E 3, 5	EP 44 – Português	
	371	EP 48, 49, 51, 52, 55, 56, 58, 59, 60, 62, 64, 67, 69		EP 54, 57, 63 – Geometria
	372	EP 70, 71, 72, 74, 76, 78, 79, 80, 81		EP 75 – Conjuntos; EP 73, 77 – Geometria
	377	ER 100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110	ER 104 – Biologia	
	378	ER 111, 112		ER 113 – Geometria

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
26 – Probabilidade	379	Introdução; E 1, 2, 3		
	380	EP 1, 2, 3, 6, 7, 10	EP 9 – Biologia	EP 4, 5 – Geometria
	381	E 1, 2, 3		
	382	E 5		
	383	EP 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19	EP 17 – Biologia	
	384	EP 20, 21, 22, 23	EP 22 – Biologia	
	385	E 1, 2, 3, 4		
	386	EP 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33		
	387	E 1, 3	E 2 – Biologia	
	388	EP 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42	EP 40 – Biologia	
	389	E 1, 2	E 2 – Biologia	
	390	EP 49, 50, 51, 52, 53; E 1, 2	EP 49, 52 – Biologia	
	391	EP 54, 55, 56, 57	EP 56 – Biologia	
	392		E 1, 2 – Biologia	
	393		Exemplo – Biologia	
	394	E 2; EP 60, 61, 62	EP 58, 59 – Biologia	
	395		E 1, 2 – Biologia	
	396		E 3, 4, 5, 6; EP 63, 64, 65 – Biologia	
	397	ER 71, 72, 73	EP 66, 67, 68, 69, 70 – Biologia	Desafio – Geometria
	398	ER 74, 75, 76, 77, 79, 80		ER 78 – Geometria
27 – Geometria espacial de posição — uma introdução intuitiva	401			EP 1 – Prismas
	402			EP 3 – Pirâmides
	403			EP 4 – Prismas
	404			EP 5, 6, 7 – Prismas
	405	EP 10		EP 9, 11 – Prismas
	406	EP 13		EP 12 – Prismas
	411			EP 16 – Prismas

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
27 – Geometria espacial de posição — uma introdução intuitiva *(continuação)*	412			EP 17 – Prismas
	413			EP 19 – Prismas
	416			EP 23, 24 – Prismas
	417			EP 25 – Prismas
	419	ER 30		
28 – Poliedros: prismas e pirâmides	420	Introdução		
	422	E 2		
	428	E 2		
	429	E 3; EP 16, 20, 22, 23		
	430	EP 24, 25, 26		
	431	E 1; EP 28, 29, 34		
	432	EP 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48		
	434	E 2, 3; EP 50, 52		
	435	EP 53, 54, 55; As pirâmides		
	441	EP 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87		
	444	EP 91, 92, 93, 94, 95, 96		
	445	ER 109, 110		
	446	ER 113, 115, 118, 119		
29 – Corpos redondos: cilindro, cone e esfera	447	Introdução	Introdução – Geografia	
	448	Exemplo		
	449	EP 2, 4, 6, 8		
	450	E 1; EP 9, 10, 11, 12, 13, 14		
	451	EP 15, 16, 17, 19		
	453	EP 22, 25, 28		
	454	E 2; EP 30, 31, 33, 34		

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
29 – Corpos redondos: cilindro, cone e esfera *(continuação)*	455	E 2		
	456	EP 35, 46, 47		
	457	EP 49, 52		
	458	E 2; EP 57, 59, 60, 61, 64, 65		
	459	EP 73, 74		
	460	EP 75, 76; ER 77, 78		
	461	ER 82, 84, 85, 86		
30 – Geometria analítica: ponto e reta	463			EP 4 – Bissetriz; E 2 – Pitágoras
	465			Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta – Teorema de Tales; E 2 – Mediana
	466			EP 20 – Triângulo isósceles; EP 24 – Triângulo retângulo
	467			Condição de alinhamento de três pontos – Determinante; EP 28 – Função
	468			EP 31 – Bissetriz
	471			EP 44 – Bissetriz
	472			Para refletir – Determinante; EP 46 – Quadrado
	473			EP 47 – Quadrado; EP 48 – Retângulo
	474			EP 52 – Triângulo; EP 54 – Paralelogramo
	476			EP 64 – Trapézio
	477			Intersecção de duas retas – Sistemas lineares
	478			EP 71 – Paralelogramo; Perpendicularidade de duas retas – Trigonometria
	479			E 3 – Projeção ortogonal; E 4 – Mediatriz
	480			EP 75 – Mediatriz; EP 79 – Triângulo

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
30 – Geometria analítica: ponto e reta *(continuação)*	482			E 2; EP 90 – Triângulo; EP 96 – Área; Ângulo formado por duas retas – Trigonometria
	484			Fórmula da área de uma região triangular – Determinante
	485			EP 111 – Quadrilátero; EP 113 – Demonstração
	486			ER 122 – Triângulo; ER 125 – Trapézio
	487			ER 135 – Área
31 – Geometria analítica: circunferência	488			1º método de completar os quadrados
	494			EP 23, 26 – Área; EP 27 – Mediatriz
	497			EP 32 – Área
	499			ER 43 – Polígonos circunscritos; ER 46 – Área
32 – Geometria analítica: secções cônicas	500	Introdução		
	506			EP 11 – Quadriláteros
	511	EP 20, 22		EP 21 – Funções
	512	Desafio		
33 – Números complexos	518		Observação 5 – Física	
	519		Observação 6 – Física	
	521			Módulo de um número complexo – Pitágoras
	522			EP 35 – Equação do 2º grau; Forma trigonométrica dos números complexos – Trigonometria
	523			Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica – Trigonometria
	530			E 1 – Geometria

Capítulo	Número da página	Contextualização	Interdisciplinaridade	Integração com outros temas matemáticos
33 – Números complexos *(continuação)*	531		E 3 – Física	E 2 – Geometria
	532	EP 64	EP 64 – Física	EP 63, 65 – Geometria; ER 69 – Equação do 2º grau
	533			ER 75 – Geometria
	534			ER 86 – Matrizes
34 – Polinômios e equações algébricas	535			Introdução – Geometria
	538			Divisão de polinômios – Divisão euclidiana
	543			EP 51, 52 – Determinantes
	546			EP 67, 69, 76 – PA; EP 70 – Logaritmos; EP 72 – PG; EP 73 – Matrizes
	548			ER 94 – PA; ER 95 – Funções
	549			ER 97 – Paralelepípedo

4. Exercícios complementares que envolvem:

- **Contextualização ©**
- **Interdisciplinaridade ⚠**
- **Integração com outros temas matemáticos TM**

Capítulo 2 — Conjuntos e conjuntos numéricos

© **1.** (Fuvest-SP) Em um vestibular Fuvest exigia-se dos candidatos à carreira de Administração a nota mínima 3,0 em Matemática e em Redação. Apurados os resultados, verificou-se que 175 candidatos foram eliminados em Matemática e 76 candidatos foram eliminados em Redação. O número total de candidatos eliminados por essas duas disciplinas foi 219. Qual o número de candidatos eliminados apenas pela Redação?

a) 24 b) 143 c) 32 d) 44 e) 99

Resposta: alternativa **d**.

© **2.** (UFSC) Numa escola com 1 030 alunos, foi feita uma pesquisa. Cada aluno poderia optar por até duas áreas de estudo. A tabela seguinte indica o resultado:

Área	Optantes
X	598
Y	600
Z	582
X e Y	250
Y e Z	300
X e Z	200

Calcule o número de alunos que optaram somente pela área **Y**.

Resposta: 50 alunos.

3. Considere o universo **U** dos alunos de uma classe (meninos e meninas) e os seguintes subconjuntos de **U**:
A: conjunto formado pelos meninos
B: conjunto formado pelos alunos aprovados
Identifique os elementos dos seguintes conjuntos:

a) $A \cap B$ b) $\complement_U^A$ c) $A - B$ d) $A \cup B$ e) $\complement_U^B$ f) $B - A$

Respostas:
a) meninos aprovados
b) meninas
c) meninos reprovados
d) todos os meninos, junto com as meninas aprovadas
e) alunos reprovados
f) meninas aprovadas

TM **Potenciação**

4. (Fuvest-SP) Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$ e $B = \{a^b \mid a \in A, b \in A \text{ e } a \neq b\}$, o número de elementos de **B** que são números pares é:
a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 13
Resposta: alternativa **c**.

5. (PUCC-SP) Numa comunidade constituída de 1 800 pessoas, há três programas de TV favoritos: Esporte (**E**), Novela (**N**) e Humorístico (**H**). A tabela seguinte indica quantas pessoas assistem a esses programas:

Programas	Número de telespectadores
E	400
N	1 220
H	1 080
E e N	220
N e H	800
E e H	180
E, N e H	100

Por esses dados, verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assiste a nenhum dos três programas é:
a) 100. b) 200. c) 900. d) Os dados do problema estão incorretos. e) nda.
Resposta: alternativa **b**.

6. (Vunesp) Numa classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 de História. O número de alunos dessa classe que gostam de Matemática e de História é:
a) exatamente 16. b) exatamente 10. c) no máximo 6. d) no mínimo 6. e) exatamente 18.
Resposta: alternativa **d**.

7. (FCMSCSP) Um entregador de jornais, para localizar os endereços dos assinantes, usa pares ordenados do tipo (rua; número), obtidos do produto cartesiano dos conjuntos **R**: ruas do bairro e **N**: números das residências. Se **R** e **N** têm o mesmo número de elementos, no dia em que ele entregar 1 681 jornais, em todos os endereços determinados pelo produto cartesiano $R \times N$, o número de ruas que ele atende é:
a) 37 b) 40 c) 41 d) 43 e) 51
Resposta: alternativa **c**.

8. (PUC-RJ) Num universo de 800 pessoas, é sabido que 200 delas gostam de samba, 300 de rock e 130 de samba e rock. Quantas não gostam nem de samba nem de rock?
a) 800 pessoas b) 730 pessoas c) 670 pessoas d) 560 pessoas e) 430 pessoas
Resposta: alternativa **e**.

9. (FCMSCSP) Analisando as carteiras de vacinação das 84 crianças de uma creche, verificou-se que 68 receberam a vacina Sabin, 50 receberam a vacina contra sarampo e 12 não foram vacinadas. Quantas dessas crianças receberam as duas vacinas?
a) 11 b) 18 c) 22 d) 23 e) 46
Resposta: alternativa **e**.

10. (Fatec-SP) Em um grupo de 20 meninas, todas têm olhos azuis ou cabelos louros, pelo menos 12 delas têm cabelos louros, e no máximo 5 têm olhos azuis e cabelos louros. Se **N** é o número de meninas que têm olhos azuis, então:
a) $N \leqslant 8$ b) $N \geqslant 5$ c) $5 \leqslant N \leqslant 13$ d) $8 \leqslant N \leqslant 15$ e) $N < 14$
Resposta: alternativa **e**.

Capítulo 3 — Funções

TM Perímetro e área do triângulo

11. Considere um retângulo de comprimento 6 e largura **x**. Determine a equação correspondente às seguintes funções:

a) o perímetro **P** em função de **x**;

b) a área **A** em função de **x**;

c) a área **A** em função do perímetro **P**.

Respostas: a) $P = 2x + 12$ b) $A = 6x$ c) $A = 3P - 36$

– Física **12.** A energia potencial elástica **E**, armazenada numa mola que foi distendida um comprimento **d**, pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$E = \frac{kd^2}{2}$$

em que **k** representa a chamada constante elástica dada em dyn/cm (característica da mola utilizada).

Os dados da tabela seguinte mostram a energia armazenada (**E**) em função da distensão (**d**) sofrida por uma mola.

a) Determine a constante elástica dessa mola, complete a tabela e represente graficamente a energia **E** (em erg) em função da distensão **d** (em cm).

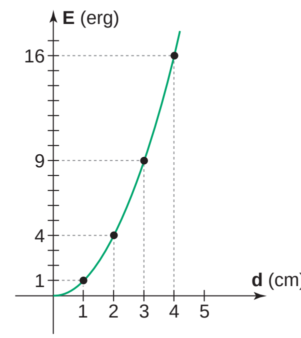
E (erg)	0	1	?	16	?	9
d (cm)	0	1	2	?	5	?

b) Em seguida, responda: quanta energia está acumulada na mola, quando ela é distendida 3,5 cm?

Respostas:

a) $1 = \frac{k1^2}{2} \Rightarrow k = 2$ dyn/cm

E (erg)	0	1	4	16	25	9
d (cm)	0	1	2	4	5	3



b) 12,25 erg.

– Física **13.** A Lei de Boyle para os gases estabelece que, se a temperatura absoluta **T** de um certo gás for mantida constante, o volume **V** ocupado por esse gás será inversamente proporcional à pressão **P** exercida sobre ele. Para um determinado gás, a Lei de Boyle é expressa como:

$$P = \frac{24{,}6}{V}$$

a) Complete os valores da tabela para esse gás. Represente graficamente a variação da pressão (**P**) em função do volume (**V**) e verifique o formato hiperbólico do gráfico obtido.

P (cmHg)	?	?	12,3	16,4
V (cm^3)	6	3	?	?

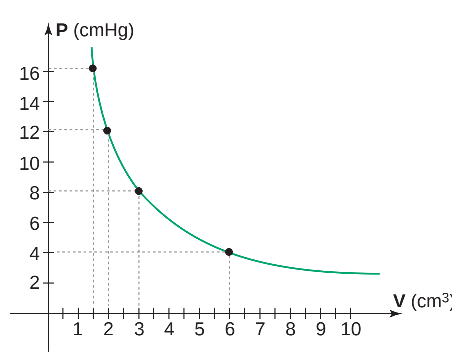
b) Qual será o volume ocupado por esse gás quando a pressão for de 10 cmHg? E qual será o valor da pressão exercida pelo gás quando seu volume for de 4 cm^3?

Respostas:

a)

P (cmHg)	4,1	8,2	12,3	16,4
V (cm^3)	6	3	2	1,5

b) O volume ocupado pelo gás será de 2,46 cm^3 quando a pressão for de 10 cmHg; quando seu volume for de 4 cm^3, a pressão exercida por ele será de 6,15 cmHg.



TM
Volume da esfera e medidas

14. O volume de água que é armazenado numa caixa-d'água é uma função das dimensões da caixa. Por exemplo, para um reservatório com o formato esférico, o volume pode ser calculado usando-se a expressão:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}, \text{ em que } \pi = 3{,}141592...$$

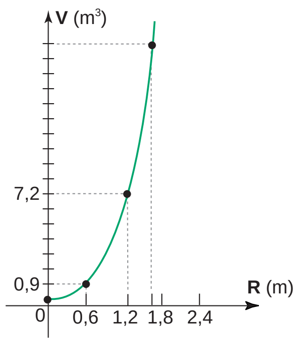
a) A tabela seguinte contém os valores dos volumes de água, **V**, em função do valor do raio, **R**, de uma caixa-d'água de formato cúbico. Represente esses valores graficamente.

V (m^3)	0	0,9	7,2	17,2	33,5
R (m)	0	0,6	1,2	1,6	2,0

b) Use $\pi = 3$ e descubra, aproximadamente, quantos litros de água cabem numa caixa-d'água cujo raio é igual a 1,4 m. (Obs.: 1 m^3 = 1 000 litros.)

Respostas:

a)



b) $V = \frac{4 \cdot \cancel{3}(1{,}4)^3}{\cancel{3}} = 10{,}976\ m^3 = 10\,976\ \ell$

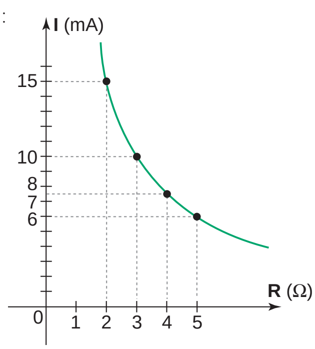
⚠ – Física **15.** A corrente elétrica **I** que circula num resistor ôhmico de resistência **R**, em cujos terminais se aplica uma diferença de potencial **V**, é inversamente proporcional à **R**, de acordo com a Lei de Ohm.

$$I = \frac{V}{R}$$

Utilizando os valores apresentados na tabela seguinte, represente a curva que mostra a variação de **I** em função de **R**.

I (mA)	6	7,5	10	15	30
R (Ω)	5	4	3	2	1

Resposta:



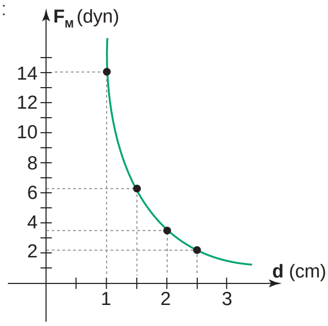
⚠ – Física **16.** A intensidade da força de atração, F_M, existente entre um ímã e um clipe de papel, separados a uma distância **d**, varia com o inverso do quadrado da distância e pode ser calculada usando a seguinte expressão:

$$F_M = \frac{14}{d^2}$$

Utilizando os valores apresentados na tabela seguinte, represente a curva que mostra como essa força magnética, F_M, varia em função da distância **d**.

F_M (dyn)	14	6,2	3,5	2,2
d (cm)	1	1,5	2	2,5

Resposta:



⚠– Física **17.** Quando se ligam um capacitor e um resistor num circuito elétrico, a diferença de potencial (voltagem) **V** existente no capacitor aumenta exponencialmente com o tempo e pode ser calculada através da expressão:

$$V = V_0\, e^{t/RC}$$

em que e = 2,71828..., V_0 representa o valor de tensão no início do processo, **R** indica o valor da resistência do resistor, **C** a capacitância do capacitor e **t** representa o tempo transcorrido.
Os valores apresentados na tabela seguinte correspondem a medidas de tensão (**V**), em função do tempo (**t**), em um capacitor.

V (volts)	0	1,2	2,1	2,7	3,2	3,5	3,7
t (s)	0	10	20	30	40	50	60

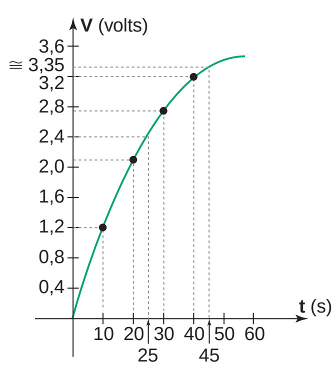
a) Represente graficamente a variação existente entre **V** e **t**.

Analise o gráfico e responda às questões:

b) Qual o valor da voltagem que existia inicialmente no capacitor?
c) Após 45 segundos, qual o valor da voltagem no capacitor?
d) Quanto tempo demora para a voltagem aumentar até o valor de 2,4 V?

Respostas:

a)



b) zero
c) ≅ 3,35 V
d) 25s

© **18.** (Fuvest-SP) A moeda de um país é o "liberal", indicado por £. O imposto de renda **I** é uma função contínua da renda **R**, calculada da seguinte maneira:

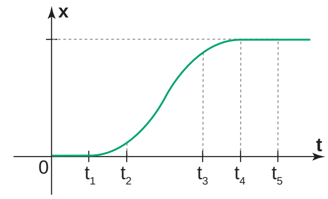
I. Se R ⩽ 24 000£, o contribuinte está isento do imposto.
II. Se R ⩾ 24 000£, calcula-se 15% de **R**, e do valor obtido subtrai-se um valor fixo **P**, obtendo-se o imposto a pagar **I**.

Determine o valor fixo **P**.

a) 1 200£ b) 2 400£ c) 3 600£ d) 6 000£ e) 24 000£

Resposta: alternativa **c**.

Física **19.** (Vunesp) O gráfico na figura representa a posição **x** de um móvel, que se deslocou ao longo de uma linha reta, em função do tempo **t**.
A velocidade do móvel foi constante e diferente de zero durante o intervalo de tempo que vai dos instantes:



a) 0 a t_1 c) t_2 a t_3 e) t_4 a t_5
b) t_1 a t_2 d) t_3 a t_4
Resposta: alternativa **c**.

TM Números primos entre si **20.** (PUC-SP) A função de Euler ∅ é definida para todo natural n > 1 da seguinte maneira: ∅(n) é o número de números naturais primos com **n** e menores que **n**. Quanto vale ∅(12)?
a) 4 b) 5 c) 3 d) 6 e) 0
Resposta: alternativa **a**.

21. (Unicamp-SP) O imposto de renda é calculado pela fórmula: $i = r \cdot a - p$, onde i = imposto; r = renda líquida; a = alíquota e p = parcela a deduzir.
O contribuinte, para calcular o imposto **i**, deve fazer uso da seguinte tabela (adaptada do Manual do Contribuinte do IRPF de 1996):

r	a (%)	p
Até R$ 8 800,00	Isento	—
De R$ 8 801,00 a R$ 17 170,00	15	R$ 1 320,00
De R$ 17 171,00 a R$ 158 450,00	25	R$ 3 037,00
Acima de R$ 158 450,00	35	R$ 18 872,00

a) Se um contribuinte teve uma renda líquida de R$ 17 200,00, qual é o valor do seu imposto?
b) Se o mesmo contribuinte tivesse ganho R$ 200,00 a menos, qual teria sido seu imposto?
Respostas: a) R$ 1 263,00 b) R$ 1 230,00

22. (Unicamp-SP) A Companhia de Abastecimento de Água de uma cidade cobra mensalmente pela água fornecida a uma residência, de acordo com a seguinte tabela:
Pelos primeiros 12 m^3 fornecidos, R$ 15,00 por m^3; pelos 8 m^3 seguintes, R$ 50,00 por m^3; pelos 10 m^3 seguintes, R$ 90,00 por m^3 e, pelo consumo que ultrapassar 30 m^3, R$ 100,00 o m^3.
Calcule o montante a ser pago por um consumo de 32 m^3.
Resposta: R$ 1 680,00

Capítulo 4 — Função afim

23. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: **A** e **B**.
- O plano **A** cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta num certo período.
- O plano **B** cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta no mesmo período.

O gasto total de cada plano é dado em função do número **x** de consultas.
a) Determine a equação da função correspondente a cada plano.
b) Determine em que condições o plano **A** é mais econômico; o plano **B** é mais econômico; os dois planos são equivalentes.
Respostas:
a) **A**: $f(x) = 50x + 100$
B: $g(x) = 40x + 180$
b) O plano **A** é mais econômico para $x < 8$; o plano **B** é mais econômico para $x > 8$; os dois planos são equivalentes para $x = 8$.

24. (Unicamp-SP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada *bandeirada*, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:
a) o preço de uma corrida de 11 km;
b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.
Respostas: a) R$ 12,90 b) 21 km

25. Após a correção das provas de uma classe, um professor resolveu mudar o sistema de pontuação, de modo que a nota máxima continuasse 100, mas a média das notas, que havia sido 60, passasse a ser 80 e que a variação das notas da antiga para a nova pontuação fosse linear.

a) Determine a sentença que permite estabelecer a mudança.
b) Se antes a nota mínima de aprovação era 50, qual é na nova pontuação?
Respostas:
a) Nova pontuação: **P**
b) Antiga pontuação: **p**
a) P = ap + b (variação linear)

$$\begin{matrix} p = 100 \text{ e } P = 100 \\ p = 60 \text{ e } P = 80 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 100a + b = 100 \\ 60a + b = 80 \end{cases}$$

$$40a = 20 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$100 \cdot \frac{1}{2} + b = 100 \Rightarrow b = 50 \qquad P = \frac{1}{2}p + 50$$

b) $p = 50 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 50 + 50 = 25 + 50 = 75$

26. (Vunesp) Segundo a matéria publicitária em *O Estado de S. Paulo*, 9/6/96, o Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS) gasta atualmente 40 bilhões de reais por ano com o pagamento de aposentadorias e pensões de 16 milhões de pessoas. A mesma matéria informa que o Governo Federal gasta atualmente 20 bilhões de reais por ano com o pagamento de um milhão de servidores públicos federais aposentados. Indicando por **x** a remuneração anual média dos beneficiários do INSS e por **y** a remuneração anual média dos servidores federais aposentados, então **y** é igual a:
a) 2x b) 6x c) 8x d) 10x e) 16x
Resposta: alternativa **c**.

27.

Continuando a seqüência acima, determine:
a) a expressão que indica o número **P** de palitos em função do número **x** de quadrados;
b) quantos palitos são necessários para formar 9 quadrados;
c) quantos quadrados são formados com 16 palitos;
d) a expressão de **x** em função de **P**.
Respostas:
a) P = 3x + 1
b) 28 palitos
c) 5 quadrados
d) $x = \frac{P - 1}{3}$ ou $x = \frac{1}{3}P - \frac{1}{3}$

28. A fórmula que dá o número do sapato (**N**) em função do comprimento (**c**) do pé, em cm, é:

$$N = \frac{5c + 28}{4} \text{ ou } N = \frac{5}{4}c + 7$$

Calcule:
a) o número do sapato, quando o comprimento do pé é de 24 cm;
b) o comprimento do pé de quem calça 40.
Respostas: a) N = 37 b) c = 26,4 cm

29. (Vunesp) Um operário ganha R$ 3,00 por hora de trabalho de sua jornada semanal regular de trabalho, que é de 40 horas. Eventuais horas extras são pagas com um acréscimo de 50%. Encontre uma fórmula algébrica para expressar seu salário bruto semanal, **S**, para as semanas em que trabalhar **h** horas, com **h** $\geqslant$ 40.
Resposta: S = 4,50h − 60, com h $\geqslant$ 40

30. Um cabeleireiro cobra R$ 12,00 o corte para clientes com hora marcada e R$ 10,00 sem hora marcada. Por dia ele atende um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável **x** de clientes sem hora marcada. Determine:
a) a expressão que indica a quantia **Q** arrecadada por dia, em função do número **x**;
b) a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes;
c) o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R$ 212,00;

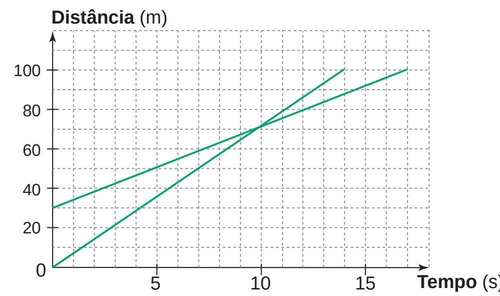
d) a expressão que indica **x** em função de **Q**;
e) a expressão que indica o número **C** de clientes atendidos por dia, em função de **x**.

Respostas:

a) $Q = 72 + 10x$ c) 20 clientes (6 + 14) e) $C = x + 6$

b) R$ 172,00 d) $x = \dfrac{Q - 72}{10}$

31. Um garoto desafia seu pai a uma corrida de 100 m. O pai permite que o filho comece a corrida 30 m a sua frente. Um gráfico bastante simplificado dessa corrida é dado a seguir:



a) Pelo gráfico, como é possível dizer quem ganhou a corrida e qual foi a diferença de tempo?
b) A que distância do início ele alcançou seu filho?
c) Em que momento depois do início da corrida ocorreu a ultrapassagem?
d) Usando os pontos de partida e de chegada, determine as equações das funções afins que definem a distância **d** em função do tempo **t** nos dois casos.

Respostas:

a) O pai ganhou a corrida, pois ele chegou nos 100 m aos 14s e o filho, aos 17s; a diferença de tempo foi de 3s.
b) Cerca de 70 m
c) Cerca de 9,5s
d) Filho: $d = \dfrac{70}{17}t + 30$ Pai: $d = \dfrac{50}{7}t$

ou – Biologia **32.** Como resultado de uma pesquisa sobre o desenvolvimento da criança brasileira, chegou-se a uma fórmula que dá, em média, a altura **y** (em cm) em função da idade **x** (em anos) para crianças de 4 a 13 anos.
Sabendo que a fórmula é $y = ax + b$ e usando os valores da tabela dada, determine:
a) os coeficientes **a** e **b**;
b) a altura correspondente à idade de 10 anos;
c) a idade correspondente à altura de 127,1 cm.

x	y
5	110
11	144,2

Respostas: a) $a = 5{,}7$ e $b = 81{,}5$
b) 138,5 cm
c) 8 anos

Capítulo 5 — Função quadrática

– Biologia **33.** (UFC-CE) Uma espécie animal, cuja família inicial era de 200 elementos, foi testada num laboratório sob a ação de uma certa droga e constatou-se que a lei de sobrevivência entre tal família obedecia à relação $n(t) = at^2 + b$, onde $n(t)$ é igual ao número de elementos vivos no tempo **t** (dado em horas) e **a** e **b**, parâmetros que dependiam da droga ministrada.
Sabe-se que a família desapareceu (morreu o último elemento) quando $t = 10$h (após o início da experiência). Calcule quantos elementos tinha esta família após 8 horas do início da experiência.
Resposta: 72

– Física **34.** O impacto de colisão **I** (energia cinética) de um automóvel com massa **m** e velocidade **v** é dado pela fórmula:

$$I = kmv^2$$

Se a velocidade triplica, o que acontece ao impacto de colisão de um carro de 1 000 kg?
Resposta: É multiplicado por 9.

35. O dono de uma loja de brinquedos vendia cada boneca por R$ 20,00; com esse preço conseguia vender, em média, 30 bonecas por dia.

Fazendo algumas promoções percebeu que, para cada real que tirava do preço de uma boneca, a venda diária aumentava em 5 bonecas.

Determine qual deve ser o preço de cada boneca para que o lucro diário seja o maior possível e qual é esse lucro.

Resposta: R$ 13,00; R$ 845,00

TM Área do retângulo e do quadrado

36. De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado **x**. Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou, em função de **x**.

Resposta: $A = 600 - 4x^2$ ou $A = -4x^2 + 600$

Capítulo 7 — Função exponencial

© ou – Física

37. (Mack-SP) Cada golpe de uma bomba de vácuo extrai 10% do ar de um tanque; se a capacidade inicial do tanque é 1 m^3, após o 5º golpe o valor mais próximo para o volume do ar que permanece no tanque é:

a) 0,590 m^3 b) 0,500 m^3 c) 0,656 m^3 d) 0,600 m^3 e) 0,621 m^3

Resposta: alternativa **a**.

– Física Geografia Química História

38. Escreva o número correspondente a cada item, em notação científica:

a) a velocidade da luz no vácuo: 300 000 000 m/s

b) distância da Terra ao Sol: 149 000 000 km

c) raio do átomo de hidrogênio: 0,000000005 cm

d) idade das rochas mais antigas: 100 000 000 000 000 000s

Respostas: a) $3 \cdot 10^8$ b) $1{,}49 \cdot 10^8$ c) $5 - 10^{-9}$ d) 10^{17}s

© ou – Biologia

39. (PUC-MG) O número de bactérias em um meio duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias no meio, ao fim de 10 horas o número de bactérias será:

a) 2^4 b) 2^7 c) 2^{10} d) 2^{12} e) 2^{15}

Resposta: alternativa **d**.

© **40.** (UFPA) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui de 20% em relação ao do ano anterior. Se **V** for o valor do carro no ano da compra, após 10 anos será:

a) $0{,}2^9V$ b) $0{,}5^9V$ c) $0{,}8^{10}V$ d) $0{,}2^{10}V$ e) $0{,}8^9V$

Resposta: alternativa **c**.

Capítulo 8 — Logaritmo e função logarítmica

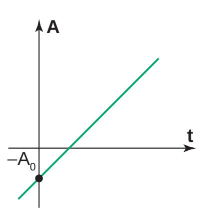
– Química

41. (FCMSCSP) Explicações para as questões I, II, III e IV:

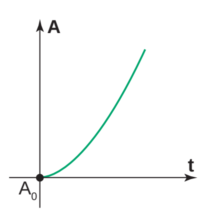
- Em radioatividade, define-se atividade (**A**) de uma amostra radioativa como sendo a velocidade de desintegração de seus átomos.
- Seja λ a constante de desintegração, que representa a probabilidade de que um átomo do elemento se desintegre na unidade de tempo.
- A unidade de atividade é o curie (Ci) e:
  $1 \text{ Ci} = 4 \cdot 10^{10}$ desint/s
- A_0 é a atividade de uma amostra no instante t_0 e **A** é a atividade da amostra no instante **t**.
- A função $A = f(t)$ é representada por $A = A_0\, e^{-\lambda t}$, onde **t** é o tempo.

I) O gráfico que melhor representa **A** em função de **t** é:

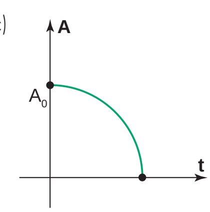
a)



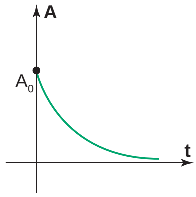
b)



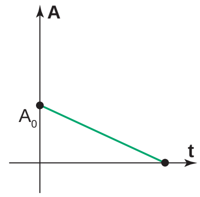
c)



d)



e)



II) **Definição**: Define-se como **meia-vida** (T) de um elemento radioativo o tempo decorrido para que, após $t = 0$, a atividade da amostra se reduza à metade da inicial.

Podemos, então, determinar a seguinte relação entre a meia-vida (T) e a constante de desintegração (λ):

a) $T = 2\lambda$ b) $T = 2 \cdot \ell n\ \lambda$ c) $T\lambda = \ell n\ 2$ d) $\dfrac{T}{\lambda} = \ell n\ 2$ e) nda.

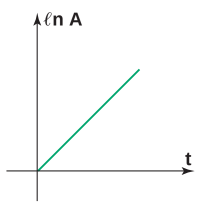
Observação: ℓn é o logaritmo neperiano.

III) Sabe-se que para o iodo (I) a meia-vida é aproximadamente 8 dias. Sendo $\ell n\ 2 = 0{,}69$, podemos afirmar que a constante de desintegração λ dessa amostra será aproximadamente:

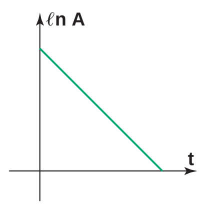
a) 4 desint/dia.
b) 0,09 desint/dia.
c) 0,72 desint/dia.
d) faltam dados para calcular λ.
e) nda.

IV) O gráfico que melhor representa $A = A_0\, e^{-\lambda t}$ é:

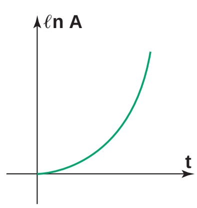
a)



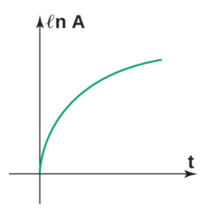
c)



b)



d)



Respostas: I — d; II — c; III — b; IV — c

⚠ – **Química** **42.** Materiais translúcidos têm a propriedade de deixar a luz passar através deles, porém com intensidade reduzida. Um determinado plástico translúcido tem a seguinte propriedade: uma folha de 1 mm de espessura reduz a intensidade da luz em 10%.

a) Quantas dessas folhas são necessárias para reduzir em 50% a intensidade original de um raio de luz?
b) E para reduzir essa intensidade em 10%?

Respostas:
a) Resolva $(0{,}9)^n = 0{,}5$; 7 folhas.
b) 22 folhas.

Capítulo 9 — Progressões

TM **Comprimento da circunferência**

43. (Vunesp) Os comprimentos das circunferências de uma seqüência de círculos concêntricos formam uma progressão aritmética de razão 2. Os raios desses círculos formam uma:

a) progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$.
b) progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{\pi}$.
c) progressão aritmética de razão 2.
d) progressão aritmética de razão π.
e) progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{\pi}$.

Resposta: alternativa **e**.

ou – Geografia

44. (PUCC-SP) Pode-se estimular o crescimento de uma população supondo que ele ocorra em PG. Nessas condições, a tabela abaixo deve ser completada com o número:

a) 128 600
b) 130 900
c) 132 000
d) 133 100
e) 231 000

Ano	Número de habitantes
1988	110 000
1989	121 000
1990	...

Resposta: alternativa **d**.

TM Matemática financeira

45. (Fuvest-SP) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R$ 100,00, daqui a três anos o preço será:

a) R$ 300,00 b) R$ 400,00 c) R$ 600,00 d) R$ 800,00 e) R$ 1 000,00

Resposta: alternativa **d**.

46. (Fuvest-SP) A população humana de um conglomerado urbano é de 10 milhões de habitantes e a de ratos é de 200 milhões. Admitindo-se que ambas as populações cresçam em progressão geométrica, de modo que a humana dobre a cada 20 anos e a de ratos dobre a cada ano, dentro de dez anos quantos ratos haverá por habitante?

Resposta: $5 \cdot 2^{\frac{23}{2}}$

47. (FGV-SP) Um indivíduo deve hoje R$ 10 000,00 e efetua, a partir do final de um mês, pagamentos de R$ 1 000,00 para abater seu débito. Se antes de cada pagamento são lançados 5% de juros sobre o seu saldo devedor, a seqüência das diferenças entre o saldo devedor de um mês e o saldo devedor do mês anterior forma:

a) uma progressão aritmética de razão 1,05.
b) uma progressão aritmética de razão 0,05.
c) uma progressão geométrica de razão 1,05.
d) uma progressão geométrica de razão 0,05.
e) uma progressão aritmética de razão 0,5.

Resposta: alternativa **c**.

Capítulo 13 — Áreas: medidas de superfícies

e TM – Escala

48. (Unicamp-SP) Na planta de um edifício em construção, cuja escala é 1 : 50, as dimensões de uma sala retangular são 10 cm e 8 cm. Calcule a área real da sala projetada.

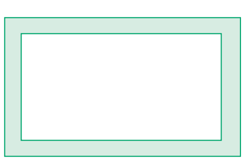
Resposta: área real da sala = 20 m^2.

TM Relação de Pitágoras

49. (Vunesp) A área de um triângulo retângulo é 12 dm^2. Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

Resposta: hipotenusa $= 2\sqrt{13}$ dm.

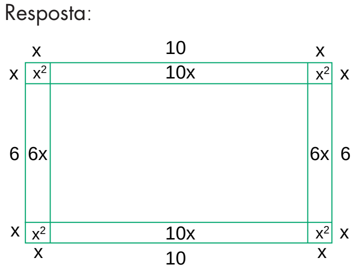
50. (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, está representado um canteiro retangular de 6 m de largura por 10 m de comprimento, cercado por um passeio de largura constante.
Se a área do passeio é de 36 m^2, a medida de sua largura, em metros, é:

a) 1,5. b) 1. c) 2. d) 0,5.

Resposta:



$4x^2 + 12x + 20x = 36 \Rightarrow 4x^2 + 32x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 1$ e $x'' = -9$ (não serve)

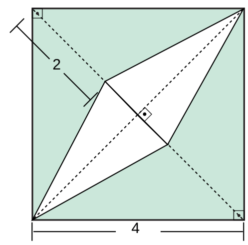
Portanto, a alternativa correta é **b**.

Outro modo de resolver:

$(10 + 2x)(6 + 2x) = 60 + 36 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1$

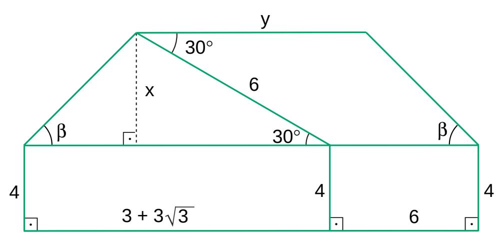
© **51.** (UFRS) Na borda de uma praça circular foram plantadas 47 roseiras, espaçadas 2 m entre si. O valor, em metros, que mais se aproxima do diâmetro dessa praça é:
a) 15. b) 18. c) 24. d) 30. e) 50.
Resposta: alternativa **d**.

TM Quadriláteros
52. (PUC-PR) Considerando a parte não-sombreada da figura um losango, a área sombreada vale:



a) $\sqrt{2}$. b) $16 - 8\sqrt{2}$. c) $16\sqrt{2}$. d) $8\sqrt{2}$. e) $4\sqrt{2}$.
Resposta: alternativa **d**.

TM Trigonometria
53. (UFPE) A área da figura ilustrada abaixo é **A** cm^2. Se todas as distâncias estão medidas em cm, os valores numéricos de **x**, **y**, **β** e **A** são, respectivamente:



a) 3, $6\sqrt{3}$, 30, $\frac{99 + 51\sqrt{3}}{2}$.
b) $\sqrt{3}$, 6, 45, $\frac{99 + 51\sqrt{3}}{2}$.
c) 3, $3 + 3\sqrt{3}$, 45, $54 + 21\sqrt{3}$.
d) 3, $\sqrt{3}$, 30, $54 + 21\sqrt{3}$.
e) 3, $3 + 3\sqrt{3}$, 30, $\frac{99 + 51\sqrt{3}}{2}$.
Resposta: alternativa **c**.

© e **TM Porcentagem**
54. (FCMSCSP) Um lago circular de 20 m de diâmetro é circundado por um passeio, a partir das margens do lago, de 2 m de largura. A área do passeio representa a seguinte porcentagem da área do lago:
a) 10%. b) 20%. c) 15%. d) 32%. e) 44%.
Resposta: alternativa **e**.

© **55.** (Fatec-SP) O pneu de um veículo com 800 mm de diâmetro, ao dar uma volta completa percorre, aproximadamente, uma distância de:
a) 25,00 m. b) 5,00 m. c) 2,50 m. d) 0,50 m. e) 0,25 m.
Resposta: alternativa **c**.

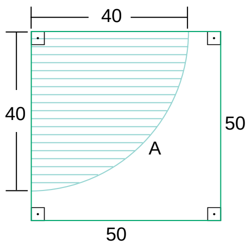
TM Porcentagem
56. (Cesgranrio-RJ) A base de um retângulo de área **S** é aumentada de 20% e sua altura é diminuída de 20%. A área do novo retângulo formado é:
a) 1,04S. b) 1,02S. c) S. d) 0,98S. e) 0,96S.
Resposta: alternativa **c**.

© **57.** Alguns jornais calculam o número de pessoas presentes em atos públicos considerando que cada metro quadrado é ocupado por 4 pessoas. Qual a estimativa do número de pessoas presentes numa praça de 4 000 m^2 que tenha ficado lotada para um comício, segundo essa avaliação?
Resposta: 16 000 pessoas.

58. (Vunesp) Um cavalo se encontra preso num cercado de pastagem, cuja forma é um quadrado, com lado medindo 50 m. Ele está amarrado a uma corda de 40 m que está fixada num dos cantos do quadrado. Considerando $\pi = 3{,}14$, calcule a área, em metros quadrados, da região do cercado que o cavalo não conseguirá alcançar, porque está amarrado.

a) 1 244 b) 1 256 c) 1 422 d) 1 424 e) 1 444

Resposta:



Área do quadrado: $50^2 = 2\,500$ m²

Área que o cavalo pode alcançar:

$$\frac{\pi \cdot 40^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1\,600}{4} = 1\,256 \text{ m}^2$$

Área procurada:

$A = 2\,500 - 1\,256 = 1\,244$ m² (alternativa **a**)

59. Uma pista circular tem 200 m de diâmetro. Usando $\pi = 3{,}14$, determine:

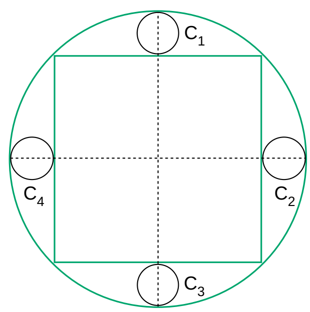
a) quantos quilômetros um ciclista percorre ao dar 300 voltas na pista?

b) para percorrer 10 km ele deve dar mais ou menos que 15 voltas?

Resposta: a) 188,4 km; b) mais que 15 voltas ($\cong$16).

TM Quadriláteros

60. (UFMG) Observe a figura:



Nela, a circunferência maior, C, tem raio 2, e cada uma das circunferências menores, C_1, C_2, C_3 e C_4, é tangente a C e a um lado do quadrado inscrito.

Os centros de C_1, C_2, C_3 e C_4 estão em diâmetros de C perpendiculares a lados do quadrado.

A soma das áreas limitadas por essas quatro circunferências menores é:

a) $8\pi(3 + 2\sqrt{2})$.

b) $\pi(3 + 2\sqrt{2})$.

c) $\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

d) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Resposta:

Diagonal do quadrado: 4 (dois raios da circunferência maior)

O lado ℓ do quadrado é tal que:

$$\ell\sqrt{2} = 4 \Rightarrow \ell = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

O raio **r** da circunferência menor é tal que:

$$4r + 2\sqrt{2} = 4 \Rightarrow r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Soma das áreas:

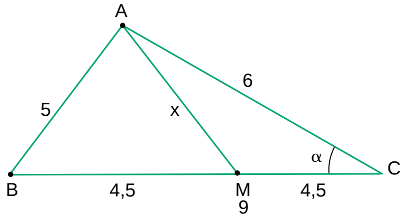
$$4\pi r^2 = \cancel{4} \cdot \frac{\pi(2 - \sqrt{2})^2}{\cancel{4}} = \pi(4 - 4\sqrt{2} + 2) = 2\pi(3 - 2\sqrt{2}) \text{ (alternativa } \mathbf{d}\text{)}$$

TM Geometria e Trigonometria

61. (UFMT) Considere um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 9 cm. A área de um quadrado cujo lado é a mediana relativa ao maior lado do triângulo considerado é, em centímetros quadrados, aproximadamente:

a) 7,9. b) 8,0. c) 9,1. d) 10,2. e) 11,3.

Resposta:



Aplicando a lei dos cossenos:

No △ABC:

$5^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{23}{27}$

No △AMC:

$x^2 = 4{,}5^2 + 6^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 6 \cdot \dfrac{23}{27} \Rightarrow x^2 = 10{,}25$

A área do quadrado de lado **x** é $A = x^2 = 10{,}25$ cm^2 (alternativa **d**).

62. (Unicamp-SP) Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm^2. Calcule:

a) o comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia;

b) a área da superfície queimada.

Respostas:

a) 5 cm —— 12,5 km

1 cm —— $\dfrac{12{,}5}{5} = 2{,}5$ km

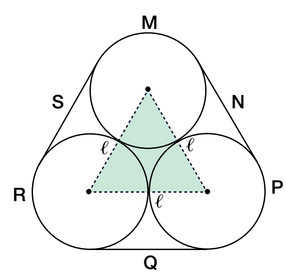
b) 1 cm —— 2,5 km

1 cm^2 —— $(2{,}5)^2 = 6{,}25$ km^2

9 cm^2 —— $9 \cdot 6{,}25 = 56{,}25$ km^2

e – Física

63. (Cesgranrio-RJ) Os centros das três polias de um mecanismo estão sobre os vértices de um triângulo eqüilátero de lado ℓ. O diâmetro de cada polia é muito próximo de ℓ, como sugere a figura.



O comprimento da correia MNPQRSM que movimenta as polias é, aproximadamente:

a) $(\pi + 3)\ell$. b) $(2\pi + 3)\ell$. c) $(\pi + 6)\ell$. d) $\dfrac{(\pi + 6)\ell}{2}$. e) $6\pi\ell$.

Resposta: alternativa **b**.

64. (UFMG) Um terreno retangular, com área de 800 m^2 e frente maior que a lateral, foi cercado com um muro.

O custo da obra era de R$ 12,00 por metro linear construído na frente, e de R$ 8,00 por metro linear construído nas laterais e no fundo.

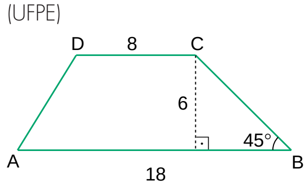
Se foram gastos R$ 1 040,00 para cercar o terreno, o comprimento total do muro construído, em metros, é:

a) 114. b) 120. c) 132. d) 180.

Resposta: alternativa **a**.

TM Quadriláteros

65. (UFPE)



Um terreno numa planície tem a forma de um trapézio ABCD como ilustrado ao lado. Pretende-se dividir o trapézio em duas regiões de mesma área usando um segmento com origem em **C** e extremidade num ponto **P** de AB. Qual o inteiro mais próximo da distância entre **C** e **P**?

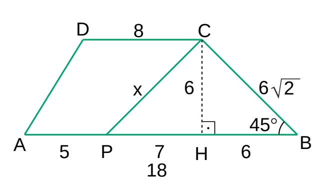
Resposta:

Área do trapézio ABCD: $\dfrac{(18 + 8)6}{2} = 78$

Área de cada região: $\dfrac{78}{2} = 39$

O △CHB é retângulo e isósceles, logo HB = 6 e CB = $6\sqrt{2}$.

P está entre **A** e **H**, pois a área do △CHB é 18 < 39.



Área do $\triangle CPB$ é 39, então:

$$\frac{PB \cdot 6}{2} = 39 \Rightarrow PB = 13$$

No $\triangle CPB$, pela lei dos cossenos:

$$x^2 = 13^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 13 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{85} \cong 9{,}2$$

Portanto, o inteiro mais próximo é 9.

66. (Unicamp-SP) O retângulo de uma bandeira do Brasil, cuja parte externa ao losango é pintada de verde, mede 2 m de comprimento por 1,40 m de largura. Os vértices do losango, cuja parte externa ao círculo é pintada de amarelo, distam 17 cm dos lados do retângulo e o raio do círculo mede 35 cm. Para calcular a área do círculo use a fórmula $A = \pi r^2$ e, para facilitar os cálculos, tome π como $\frac{22}{7}$.

a) Qual é a área da região pintada de verde?

b) Qual é a porcentagem da área da região pintada de amarelo, em relação à área total da bandeira? Dê sua resposta com duas casas decimais.

Resposta:

a) Retângulo: $200 \cdot 140 = 28\,000 \text{ cm}^2$

Losango: $\frac{(200 - 34)(140 - 34)}{2} = \frac{166 \cdot 106}{2} = 8\,798 \text{ cm}^2$

Área verde: $28\,000 - 8\,798 = 19\,202 \text{ cm}^2 = 1{,}9202 \text{ m}^2$

b) Losango: $8\,798 \text{ cm}^2$

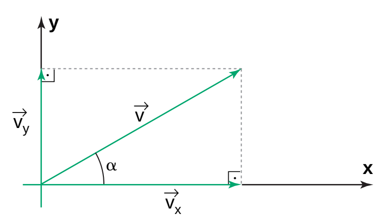
Círculo: $\pi r^2 = \frac{22}{7} \cdot 35^2 = 3\,850 \text{ cm}^2$

Área amarela: $8\,798 - 3\,850 = 4\,948 \text{ cm}^2$

Área amarela em relação à área total da bandeira: $4\,948 : 28\,000 \cong 0{,}1767 \cong 17{,}67\%$

Capítulo 14 — Trigonometria no triângulo retângulo

I – Física **67.** Observe a figura:

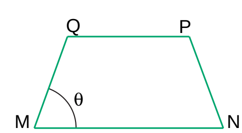


Dizemos que $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ são as componentes retangulares do vetor $\vec{v}$.

Considerando o módulo de $\vec{v}$ igual a 10 cm e o ângulo α de 30°, determine os módulos de $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$.

Resposta: módulo de $\vec{v}_x = 5\sqrt{3}$ cm; módulo de $\vec{v}_y = 5$ cm.

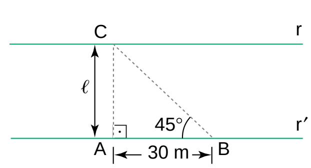
TM Quadriláteros **68.** (Uece) Na figura, MNPQ é um trapézio isósceles, MN = 20 cm, QP = 10 cm e $\theta = 60°$. Então, a área desse trapézio, em centímetros quadrados, é:



a) $55\sqrt{3}$. b) $65\sqrt{3}$. c) $75\sqrt{3}$. d) $85\sqrt{3}$.

Resposta: alternativa **c**.

69. (UMC-SP) Nesta figura, as retas paralelas **r** e **r'** representam as margens de um rio.

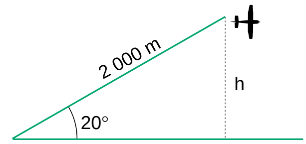


Conforme os dados da figura, determine a largura ℓ.

a) 45 m b) 22,5 m c) 15 m d) 75 m e) 30 m

Resposta: alternativa **e**.

70. (Unisinos-RS) Um avião levanta vôo sob um ângulo constante de 20°. Após percorrer 2 000 m em linha reta, a altura atingida pelo avião será de, aproximadamente: (Dados: sen 20° = 0,342; cos 20° = 0,94 e tg 20° = 0,364.)

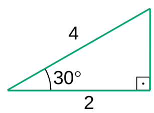


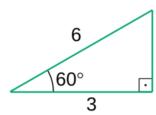
a) 728 m. b) 1 880 m. c) 1 000 m. d) 1 720 m. e) 684 m.

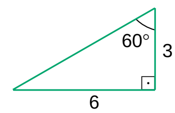
Resposta: alternativa **e**.

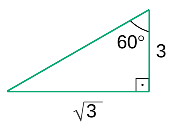
TM Geometria

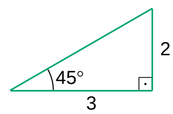
71. (Mack-SP) Determine qual é o triângulo retângulo cujos dados estão compatíveis:

a)


c)


e)


b)


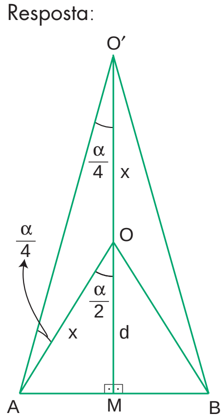
d)


Resposta: alternativa **c**.

e TM Mediatriz de um segmento

72. (Unicamp-SP) Um observador **O**, na mediatriz de um segmento AB e a uma distância **d** de $\overline{AB}$, vê esse segmento sob um ângulo α. O observador afasta-se do segmento ao longo da mediatriz até uma nova posição **O′** de onde ele vê o segmento sob o ângulo $\frac{\alpha}{2}$. Expresse a distância x = OO′ em termos de α e **d**.

Resposta:



$O\hat{A}M \to 90° - \frac{\alpha}{2}$

$O'\hat{A}M \to 90° - \frac{\alpha}{4}$

$O'\hat{A}O \to \left(90° - \frac{\alpha}{4}\right) - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{4}$

Então o ΔO′AO é isósceles de base O′A, ou seja, OA = OO′ = x.

No ΔAMO, retângulo em **M**, temos

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{x} \Rightarrow x = \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

73. (UFS-SE) Se os raios solares formam um ângulo α com o solo, qual é, aproximadamente, o comprimento da sombra de um edifício com 10 m de altura? $\left(\text{Dado: sen } \alpha = \frac{3}{5}\right)$

a) 16,6 m b) 15,5 m c) 14,4 m d) 13,3 m e) 12,2 m

Resposta: alternativa **d**.

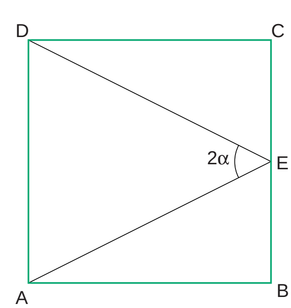
TM Quadriláteros

74. (UFMG) Observe a figura abaixo.

Nessa figura, **E** é ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado ABCD.

A tangente do ângulo α é:

a) $\frac{1}{2}$. b) 1. c) 2. d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



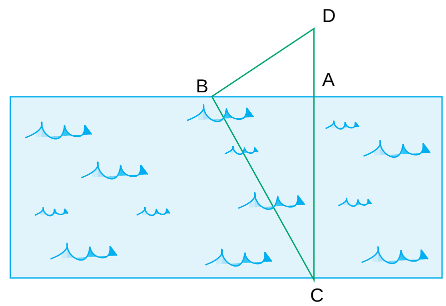
Resposta: alternativa **a**.

© **75.** (Vunesp) Duas rodovias **A** e **B** se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia **A**, a 4 km do cruzamento. Pelo ponto passa uma rodovia retilínea **C**, perpendicular à rodovia **B**. A distância do posto de gasolina à rodovia **B**, indo através de **C**, em quilômetros, é:

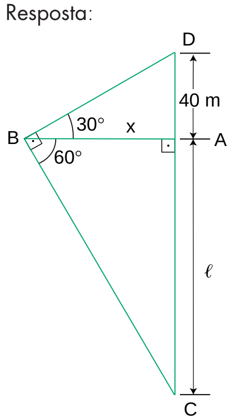
a) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $\sqrt{2}$. e) $2\sqrt{2}$.

Resposta: alternativa **e**.

© **76.** (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto **B** de onde podia ver na margem oposta o coqueiro **C**, de forma que o ângulo ABC fosse 60°; determinou o ponto **D** no prolongamento de $\overline{CA}$ de forma que o ângulo CBD fosse de 90°. Medindo $\overline{AD}$ = 40 m, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.



Resposta:



Como **A** e **B** são pontos na mesma margem do rio, AB ⊥ AC; portanto, $\overline{AB}$ é a altura relativa à hipotenusa.

$\text{tg } 30° = \frac{40}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{120}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ m

$\text{tg } 60° = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\ell}{40\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = 40 \cdot 3 = 120$ m

Portanto, a largura do rio é 120 m.

Capítulo 15 — Resolução de triângulos quaisquer

TM Quadriláteros

77. (UnB-DF) Os lados de um retângulo medem 25 m e $25\sqrt{3}$ m. Os ângulos formados pela intersecção das diagonais são:

a) 120° e 60°. b) 150° e 30°. c) 90° e 90°. d) 100° e 80°. e) 110° e 70°.

Resposta: alternativa **a**.

TM Perímetro e área do triângulo isósceles

78. Um triângulo tem dois lados de 8 cm e dois ângulos de 30°. Calcule o perímetro e a área desse triângulo.

Resposta: P = $16 + 8\sqrt{3}$ cm e A = $16\sqrt{3}$ cm^2.

TM Quadriláteros

79. (Cesgranrio-RJ) Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados 3 e 4 mede 120°. A maior diagonal deste paralelogramo mede:

a) 5. b) 6. c) $\sqrt{40}$. d) $\sqrt{37}$. e) 6,5.

Resposta: alternativa **d**.

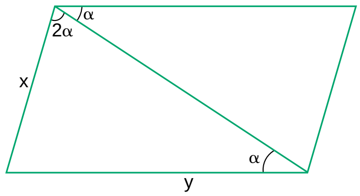
TM Quadriláteros

80. (ITA-SP) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um α e o outro 2α. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo é:

a) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$. c) $\frac{1}{2 \cdot \text{sen } \alpha}$. e) tg α.

b) $\frac{1}{\text{sen } 2\alpha}$. d) $\frac{1}{2 \cdot \cos \alpha}$.

Resposta:



Pela lei dos senos:

$$\frac{x}{\text{sen } \alpha} = \frac{y}{\text{sen } 2\alpha} \Rightarrow \frac{x}{\text{sen } \alpha} = \frac{y}{2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2 \cdot \cos \alpha} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2 \cdot \cos \alpha}$$

Portanto, a resposta correta é a alternativa **d**.

TM Polígonos regulares

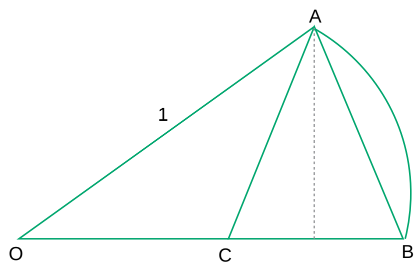
81. (Vunesp) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é

a) $\sqrt{3}$. b) 2. c) 2,5. d) 3. e) 4.

Resposta: alternativa **b**.

TM Polígonos regulares e triângulos isósceles

82. (Unicamp-SP) Na figura abaixo, $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ é o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio 1 e centro **O**.

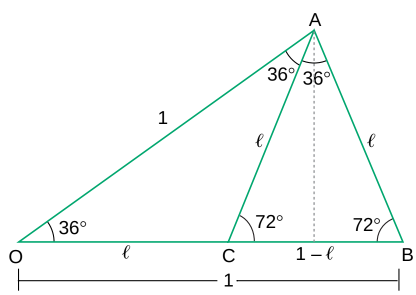


Com base nesses dados:

a) calcule o valor de ℓ;

b) mostre que $\cos 36° = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Resposta:



a) O $\triangle AOB$ é isósceles de lados 1, 1 e ℓ e ângulos de 36°, 72° e 72°.
O $\triangle ABC$ é isósceles de lados ℓ, ℓ e $1 - \ell$ e ângulos de 36°, 72° e 72°.
Os triângulos AOB e ABC são semelhantes (mesmos ângulos). Então:

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\ell} = \frac{\ell}{1 - \ell} \Rightarrow \ell^2 = 1 - \ell \Rightarrow \ell^2 + \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

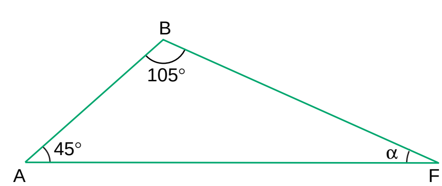
b) No $\triangle AOB$, usando a lei dos cossenos:

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 36° \Rightarrow \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = 2 - 2 \cdot \cos 36° \Rightarrow 2 \cdot \cos 36° = 2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow$$

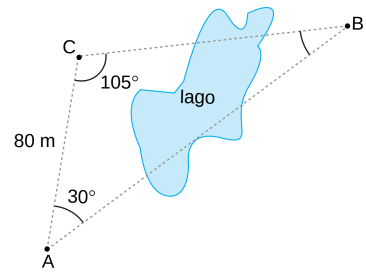
$$\Rightarrow \cos 36° = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

83. (Unicamp-SP) Observadores nos pontos **A** e **B** localizam um foco de incêndio florestal em **F**. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 45°$, $F\hat{B}A = 105°$ e a distância AB = 15 km, determine as distâncias AF e BF.

Resposta: $AF = 15\sqrt{2}$ km e $BF = \dfrac{15(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$ km.



© **84.** (PUC-PR) Determine a distância do ponto **A** ao ponto **B**, inacessível, sendo conhecidos os dados, conforme figura.



(Dado: $\sqrt{3} = 1,7$.)

a) 100 m
b) 102 m
c) 104 m
d) 106 m
e) 108 m

Resposta:

Fazendo $105° = 60° + 45°$, calcula-se $\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Usando a lei dos senos:

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{80}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\,x}{2} = \frac{80\sqrt{6} + 80\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sqrt{2}\,x = 40\sqrt{6} + 40\sqrt{2} \Rightarrow$$

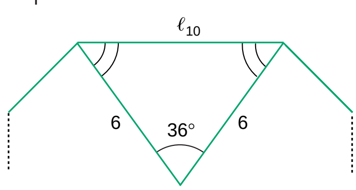
$$\Rightarrow x = 40\sqrt{3} + 40 = 40 \cdot 1,7 + 40 = 68 + 40 = 108$$

Logo, a alternativa correta é **e**.

TM **Polígonos regulares**

85. Calcule a área aproximada de um decágono regular inscrito numa circunferência com raio de 6 cm. (Dados: sen 36° = 0,59; cos 36° = 0,81 e tg 36° = 0,73.)

Resposta:



$$A_{\triangle} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 36°}{2} = 18 \cdot 0,59 = 10,62 \text{ cm}^2$$

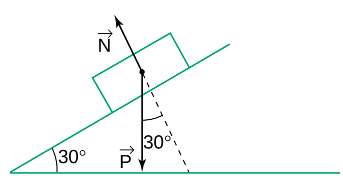
Como o decágono regular possui 10 triângulos congruentes, temos:

$A = 10 \cdot 10,62 = 106,2 \text{ cm}^2$

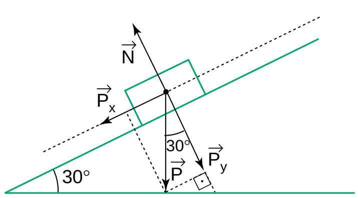
– Física

86. Um corpo com massa de 7 kg é abandonado em um plano inclinado cujo ângulo de elevação é de 30°, sendo desprezível o atrito entre o corpo e o plano. Admitindo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

a) a aceleração do corpo;
b) a intensidade da reação normal de apoio.



Resolução: Decompondo a força $\vec{P}$ em seus componentes retangulares, obtemos:



$$P_x = P \cdot \text{sen } 30° = \frac{1}{2}mg$$

$$P_y = P \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

a) Para calcular a aceleração, usamos a segunda lei de Newton na direção do movimento (direção **x**):

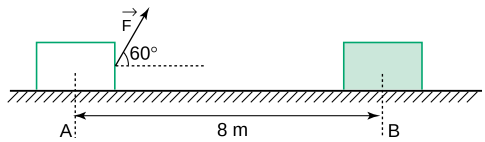
$$P_x = ma \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}g = \cancel{m}a \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 = a \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

b) Para calcular a intensidade da normal ($\vec{N}_A$), observa-se que $\vec{P}_y$ anula $\vec{N}_A$ (não há movimento na direção perpendicular ao plano de apoio):

$$P_y = N_A \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}mg = N_A \Rightarrow N_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \cdot 10 = 35\sqrt{3} \text{ N}$$

Portanto, a aceleração do corpo é 5 m/s^2 e a intensidade da reação normal ao apoio é de $35\sqrt{3}$ N.

– Física **87.** Um bloco é deslocado de 8 m por uma força de 40 N e o ângulo formado com a horizontal é de 60°, de acordo com a figura.



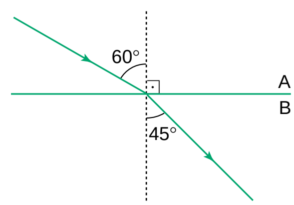
Determine o trabalho realizado.

Resolução:

Analisando a figura, vemos que apenas o componente F_x realiza trabalho (não há deslocamento na direção **y**). Então, sabendo que o trabalho é dado pelo produto entre a força e o deslocamento que o bloco sofre, temos:

$$\tau_{A,\,B} = Fx \cdot d = F \cdot d \cdot \cos \alpha = 40 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 160 \text{ J}$$

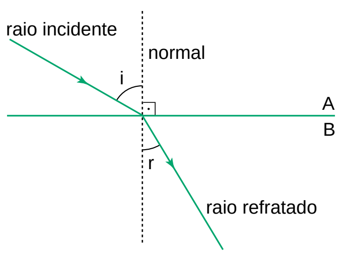
– Física **88.** Um raio luminoso monocromático passa de um meio **A** para um meio **B** de acordo com a figura:



O meio **A** é o ar, em que $n_A = 1$. Determine o índice de refração absoluto do meio **B**.

Resolução:

Observe a figura a seguir:



$\hat{i}$ = ângulo de incidência

$\hat{r}$ = ângulo de refração

n_A = índice de refração do meio **A**

n_B = índice de refração do meio **B**

Podemos relacionar esses elementos pela lei de Snell-Descartes:

$n_A \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_B \cdot \text{sen}\,\hat{r}$. Assim:

$$n_A \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_B \cdot \text{sen}\,\hat{r} \Rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = n_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_B = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Capítulo 16 — Conceitos trigonométricos básicos

89. A roda de uma bicicleta tem raio de 44 cm. Qual é a distância que essa bicicleta percorre quando a roda dá 1 000 voltas? (Use $\pi = 3{,}14$.)

a) mais de 4 km
b) entre 3 e 4 km
c) entre 2 e 3 km
d) entre 1 e 2 km
e) menos de 1 km

Resposta: alternativa **c**.

90. (Cefet-MG) A medida do menor ângulo central formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 9h 30min, em graus, é

a) 90.
b) 105.
c) 110.
d) 120.
e) 150.

Resposta: alternativa **b**.

91. (UFE-ES) Uma curva numa linha férrea deve ser traçada em círculo. O raio que deve ser dado ao círculo para que os trilhos mudem 25° de direção numa distância de 40π m é:

a) 308 m.
b) 268 m.
c) 258 m.
d) 278 m.
e) 288 m.

Resposta: alternativa **e**.

92. (PUC-MG) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400 m descreve um arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, a medida do arco descrita por esse ponto, em metros, é:

a) π. b) $\frac{3\pi}{4}$. c) $\frac{4\pi}{3}$. d) $\frac{10\pi}{9}$. e) $\frac{11\pi}{10}$.

Resposta: alternativa **d**.

93. (PUC-PR) Um relógio foi acertado exatamente às 6h. Que horas o relógio estará marcando após o ponteiro menor (das horas) ter percorrido um ângulo de 72°?

a) 8h 12min b) 7h 28min c) 6h 50min d) 8h 24min e) 8h 36min

Resposta: alternativa **d**.

Capítulo 18 — Relações, equações e inequações trigonométricas

TM
Potenciação

94. (FESP-PE) A equação $10^{\cos x} = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$:

a) tem por raiz $x = \pi$.

b) não tem raiz.

c) tem por raiz $x = \frac{\pi}{4}$.

d) tem por raiz $x = \frac{\pi}{2}$.

e) tem raiz, mas não pode ser determinada.

Resposta: alternativa **d**.

TM
Logaritmo

95. (FGV-SP) O valor de $\log\left(\text{tg } \frac{5\pi}{4}\right)$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Resposta: alternativa **c**.

TM
Potenciação

96. (Mack-SP) A condição para que exista **x** real que satisfaça a equação $3^{\cos x} = k$ é:

a) $\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant 3$.

b) $-1 \leqslant k \leqslant 1$.

c) $-3 \leqslant k \leqslant 3$.

d) **k** é um número real positivo qualquer.

e) nda.

Resposta: alternativa **a**.

TM
Sistemas

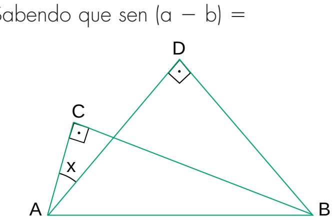
97. (Fuvest-SP) Ache **m** de modo que o sistema $\begin{cases} \cos x + m \cdot \text{sen } x = 0 \\ \cos x - m \cdot \text{sen } x = 1 \end{cases}$ na incógnita **x** tenha solução.

Resposta: $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Capítulo 19 — Transformações trigonométricas

TM
Triângulo retângulo

98. (Fuvest-SP) Nos triângulos retângulos da figura, AC = 1 cm, BC = 7 cm e AD = BD. Sabendo que sen (a − b) = = sen a · cos b − cos a · sen b, o valor de sen x é:



a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{7}{\sqrt{50}}$.

c) $\frac{3}{5}$.

d) $\frac{4}{5}$.

e) $\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Resposta: alternativa **c**.

TM
Sistemas

99. (ITA-SP) Seja **a** uma constante real. Eliminando θ das equações abaixo:

$$\begin{cases} x \cdot \text{sen } \theta + y \cdot \cos \theta = 2a \cdot \text{sen } 2\theta \\ x \cdot \cos \theta - y \cdot \text{sen } \theta = a \cdot \cos 2\theta \end{cases}$$

obtemos:

a) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

b) $(x - y)^{\frac{2}{3}} - (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$

c) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (y - x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

d) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$

e) nda.

Resposta: alternativa **a**.

TM **Ângulos de um triângulo**

100. (Vunesp) Sabe-se que um dos ângulos internos de um triângulo mede 120°. Se os outros dois ângulos, **x** e **y**, são tais que $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, a diferença entre as medidas de **x** e **y** é:

a) 5°. b) 15°. c) 20°. d) 25°. e) 30°.

Resposta:

$x + y = 60° \Rightarrow x = 60° - y$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\cos(60° - y)}{\cos y} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{3})\cos y = 2(\cos 60° \cdot \cos y + \text{sen } 60° \cdot \text{sen } y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y + \sqrt{3} \cdot \cos y = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \cos y + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen } y\right) \Rightarrow \cancel{\cos y} + \sqrt{3} \cdot \cos y = \cancel{\cos y} + \sqrt{3} \cdot \text{sen } y \Rightarrow \cos y = \text{sen } y \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 225°$ (não convém) ou $y = 45°$

$x = 60° - 45° = 15°$

Portanto, a diferença entre as medidas de **x** e **y** é 30° (45° − 15°); alternativa **e**.

Capítulo 20 — Noções básicas de Estatística

© **101.** (Vunesp) Suponhamos que nos vestibulares de 1996 uma universidade tivesse tido, para os seus diversos cursos, uma média de 3,60 candidatos por vaga oferecida. Se para os vestibulares de 1997 o número de vagas for aumentado em 20% e o número de candidatos aumentar em 10%, qual a média de candidatos por vaga que essa universidade terá?

a) 3,24 b) 3,20 c) 3,36 d) 3,40 e) 3,46

Resposta: alternativa **b**.

© **102.** (Unicamp-SP) Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após somados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5 o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno tenha tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira prova para ser dispensado da recuperação?

Resposta: Nota maior ou igual a 7,9.

Capítulo 22 — Matrizes

103. O quadro abaixo registra os resultados obtidos por quatro times em um torneio em que todos se enfrentaram uma vez:

	Vitórias	Empates	Derrotas
América	0	1	2
Botafogo	2	1	0
Nacional	0	2	1
Comercial	1	2	0

a) Represente a matriz $A = (a_{ij})$ correspondente.

b) Qual é a ordem da matriz **A**?

c) O que representa o elemento a_{23} da matriz **A**?

d) Qual o elemento da matriz **A** que indica a vitória do Comercial?

e) Considerando que um time ganha três pontos na vitória e um ponto no empate, calcule quantos pontos fez cada time.

f) Qual foi a classificação final do torneio?

TM **Trigonometria**

104. Dados x, y, z, w ∈ [0, π], calcule x + y + z + w, sabendo que $\begin{bmatrix} \text{tg } x & \cos y \\ \cos z & \text{sen } w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Resposta: $\frac{25\pi}{12}$

© **105.** Em folhetos turísticos, é comum aparecerem tabelas com as distâncias em quilômetros entre cidades, na forma de uma matriz.

Considerando as cidades de Curitiba, Florianópolis e Belo Horizonte, nessa ordem para linhas e colunas, faça uma pesquisa e identifique qual é a matriz correspondente às distâncias entre elas.

	C	F	BH
C	?	?	?
F	?	?	?
BH	?	?	?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 300 & 1\,300 \\ 300 & 0 & 1\,000 \\ 1\,300 & 1\,000 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1\,000 & 1\,300 \\ 1\,000 & 0 & 300 \\ 1\,300 & 300 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 1\,300 & 1\,000 \\ 1\,300 & 0 & 300 \\ 1\,000 & 300 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 300 & 300 \\ 0 & 1\,000 & 1\,000 \\ 0 & 1\,300 & 1\,300 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 300 & 1\,000 \\ 300 & 0 & 1\,300 \\ 1\,000 & 1\,300 & 0 \end{pmatrix}$

Resposta: alternativa **d**.

TM **Trigonometria**

106. (Vunesp) Considere as matrizes reais 2×2 do tipo:

$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$

a) Calcule o produto $A(x) \cdot A(x)$.
b) Determine todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

Resposta:

a) $A(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\ 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x & \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{bmatrix}$

b) $A(x) \cdot A(x) = A(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix} \Rightarrow \cos x = 1$ e $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x$

$x \in [0, 2\pi]$ e $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

$x \in [0, 2\pi]$ e $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow x = 2x$ ou $x + 2x = \pi \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

TM **Potenciação**

107. (UEL-PR) Dada a matriz $A = (a_{mn})_{2 \times 2}$, em que $a_{mn} = 2^{n-m}$, a soma de todos os elementos que compõem a matriz A^2 é igual a:

a) $\frac{81}{4}$. b) 10. c) 9. d) $\frac{25}{4}$. e) -6.

Resposta: alternativa **c**.

TM **Trigonometria**

108. (UFMG) Considere a matriz $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Prove que $R^2(\theta) - R(2\theta) = 0$ para todo número real θ.
(*Observação*: $R^2 = RR$.)

Resposta:

$R^2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta & -\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R(2\theta)$

$R^2(\theta) = R(2\theta) \Rightarrow R^2(\theta) - R(2\theta) = 0$

TM **Logaritmo e Trigonometria**

109. Considere as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} \log 1 & \log 0{,}01 \\ \log 100 & \log 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

É correto afirmar que:

a) $A = \frac{1}{2}B$ b) $A = B$ c) $A = 2B$ d) $A = -B$ e) $A = B^t$

Resposta: alternativa **c**.

TM **Trigonometria**

110. (UFMG) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$ e a matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que o conjunto solução da equação $A^2 = I$ é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(*Observação*: $A^2 = AA$.)

Resposta:

$A^2 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x & 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\ 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen} 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 23 — Determinantes

TM **Função de Trigonometria**

111. Dados A = $\mathbb{R}$, **B**: conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e **M**: função de **A** em **B** tal que

$M(x) = \begin{bmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ \cos 2x & -\text{sen } x \end{bmatrix}$, descubra $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e calcule seu determinante.

Resposta: $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; det $= -1$.

TM **Trigonometria**

112. (PUC-SP) Um possível valor de **x** que satisfaz a equação $\begin{vmatrix} 2 \cdot \text{sen } x & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos x \end{vmatrix} = 0$ é:

a) $\frac{\pi}{3}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\frac{\pi}{6}$. d) $\frac{\pi}{8}$. e) $\frac{\pi}{12}$.

Resposta: alternativa **e**.

TM **Potenciação e Logaritmo**

113. (Faap-SP) Determine o valor de **x** na equação $\begin{vmatrix} 2^x & -1 & 3 \\ 1 & 2^x & -2 \\ -3 & 2 & -2^x \end{vmatrix} = 0$

Resposta: $\frac{2 + \log_2 3}{2}$.

TM **Trigonometria**

114. (Fuvest-SP) Assinale o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} \text{sen } 2x & 0 & 0 \\ \cos 3x & \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } 4x & \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

a) $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ c) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ d) $\left\{k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resposta: alternativa **e**.

TM **Trigonometria**

115. (FMU-SP) O determinante da matriz $\begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ -2 \cdot \cos x & 2 \cdot \text{sen } x \end{pmatrix}$ é igual a:

a) sen 2x. b) 2. c) −2. d) $2 \cdot \text{sen}^2 x$. e) cos 2x.

Resposta: alternativa **b**.

TM **Logaritmo**

116. (PUC-RS) Sendo $\begin{vmatrix} 2^3 & 1 \\ -\log_2 x & -1 \end{vmatrix} = -2$, então $\log_4 x$ é igual a:

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

Resposta: alternativa **b**.

TM **Trigonometria**

117. (Fuvest-SP) A matriz $\begin{bmatrix} \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 1 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é inversível, se e somente se:

a) $\theta \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. b) $\theta \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. c) $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. d) $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. e) $\theta \in \mathbb{R}$.

Resposta: alternativa **a**.

TM **Trigonometria**

118. (Vunesp) Determine os valores de θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de maneira que o determinante $\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & \text{sen } \theta & \text{sen } \theta \end{vmatrix}$ seja nulo.

Resposta: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.

TM **Trigonometria, Potenciação e Logaritmo**

119. (FCMSCSP) Considere a matriz $(a_{ij})_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \log 1 & 2 \\ 3 & \text{sen } \pi & (-3)^2 & 0 \\ 1 & \cos \frac{\pi}{3} & 0 & (-1)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

O cofator de A_{31} é:

a) −27. b) −18. c) −9. d) 0. e) 1.

Resposta: alternativa **c**.

TM Trigonometria

120. O determinante da matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} \text{sen } x & \cos^2 x & 1 \\ \text{sen } x & \cos x & 0 \\ \text{sen } x & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é:

a) $\text{sen}^2 x$. b) 0. c) sen 2x. d) $\text{sen}^3 x$. e) sen x.

Resposta: alternativa **d**.

TM Trigonometria

121. (Uece) Seja **a** um número real e **S** a soma dos valores reais de **x** no intervalo aberto $(0; 2\pi)$ que anulam o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x & \cos x \end{vmatrix}$$

Calcule o valor de $\dfrac{44S}{\pi}$.

Resposta: 66.

TM Logaritmo

122. (Faap-SP) Calculando $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$, obtemos:

a) 0. b) 1. c) 2. d) log 7. e) nda.

Resposta: alternativa **c**.

TM Potenciação e Logaritmo

123. (Aman-RJ) O determinante de $M = \begin{bmatrix} \ell n\, e^x & e^x \\ x & \pi x \end{bmatrix}$, quando $x = 1$, é:

a) π b) $\pi - e$ c) $\pi + e$ d) e e) $-e$

Resposta: alternativa **b**.

TM Trigonometria

124. (UMC-SP) Os valores de **x** que satisfazem a equação $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} = (1 - \text{tg}^2 x)^{-1} \cdot \text{tg } x$, para $k \in \mathbb{N}$, são:

a) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. b) $x = \dfrac{k\pi}{2}$. c) $x = k\pi$. d) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. e) $x = 2k\pi$.

Resposta: alternativa **c**.

TM Trigonometria

125. (PUC-PR) Se $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, então o valor do determinante $\begin{vmatrix} \dfrac{\text{sen } 3\theta}{\cos \theta} & \dfrac{\cos 3\theta}{\text{sen } \theta} & 1 \\ \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} & \dfrac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

Resposta: alternativa **e**.

TM Logaritmo

126. (UFPR) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que **a**, **b**, **c** e **d** são números reais, classifique as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas:

1ª) Se $a = \log_2 6$, $b = \log_2 3$ e $c = d = 1$, então $\det A = 2$.

2ª) Se $a = b = c = d = 1$, então $A^2 = 2A$.

3ª) Se $a = 2$, $b = -2$, $c = 2^{-x}$ e $d = 2^x$, então existe somente um valor real de **x** tal que $\det A = 5$.

4ª) Se $ad \neq bc$, então **A** tem matriz inversa.

5ª) Se **A** é matriz identidade, então $\log_{10} (\det A) = 0$.

Resposta:

Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem-se $\det A = ad - bc$.

1ª) Falsa, pois $\det A = (\log_2 6) \cdot 1 - (\log_2 3) \cdot 1 \Rightarrow \det A = \log_2 6 - \log_2 3 \Rightarrow \det A = \log_2\left(\dfrac{6}{3}\right) = \log_2 2 = 1$.

2ª) Verdadeira; se a = b = c = d = 1, então $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{bmatrix}$.

Portanto, $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$.

3ª) Falsa; $\det A = (2)(2^x) - (-2)(2^{-x})$.

Substituindo $\det A = 5$ e $2^x = t$, vem:

$5 = 2 \cdot t + 2 \cdot \frac{1}{t}$, ou seja, $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Resolvendo, vem $t = 2$ ou $t = \frac{1}{2}$.

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

4ª) Verdadeira; se $ad \neq bc$, então $\det A \neq 0$. Logo **A** é inversível.

5ª) Verdadeira; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow \log_{10} 1 = 0$.

Capítulo 24 — Sistemas lineares

TM Conjuntos numéricos

127. (PUC-SP) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas **x** e **y** $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$.

Esse sistema tem uma única solução para certo número real **k**, que é um:

a) quadrado perfeito.
b) número primo.
c) número racional não inteiro.
d) número negativo.
e) múltiplo de 5.

Resposta: alternativa **a**.

TM Potenciação

128. (UFMG) Determine todos os valores de **x**, **y** e **z** que satisfazem o sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y \cdot 3^z = 1 \\ \dfrac{2^x}{2^y \cdot 2^z} = 4 \\ 4^{-x} \cdot 16^y \cdot 4^z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Resposta: $x = 1$, $y = 1$ e $z = -2$.

© **129.** (Unicamp-SP) Um copo cheio de água pesa 385 g; com $\frac{2}{3}$ da água pesa 310 g. Pergunta-se:

a) Qual é o peso do copo vazio?

b) Qual é o peso do copo com $\frac{3}{5}$ da água?

Resposta: a) 160 g; b) 295 g.

© **130.** (UFPR) O sistema formado pelas equações $x + 5y + 10z = 500$, $x + y + z = 92$ e $x - z = 0$ é a representação algébrica do seguinte problema: totalizar R$ 500,00 com cédulas de um, cinco e dez reais, num total de 92 cédulas, de modo que as quantidades de cédulas de um e de dez sejam iguais. Assim, classifique em verdadeira ou falsa as seguintes afirmações:

1ª) No sistema, a incógnita **x** representa a quantidade de cédulas de dez reais.

2ª) O sistema formado pelas três equações é possível e determinado.

3ª) A equação $x - z = 0$ representa a condição de serem iguais as quantidades de cédulas de um e de dez reais.

4ª) Se fosse imposta a condição de serem iguais as quantidades de cédulas de um, cinco e dez reais, então seria impossível totalizar R$ 500,00.

5ª) Se fosse retirada a condição de serem iguais as quantidades de cédulas de um e de dez reais, então haveria infinitas maneiras de totalizar R$ 500,00 com cédulas de um, cinco e dez reais, num total de 92 cédulas.

Resposta:

1ª) Falsa; a incógnita **x** representa a quantidade de cédulas de um real.

2ª) Verdadeira

$$\begin{cases} x + 5y + 10z = 500 \\ x + y + z = 92 \\ x - z = 0 \Rightarrow x = z \end{cases}$$

Substituindo nas duas primeiras equações, vem:

$$\begin{cases} 11x + 5y = 500 \\ 2x + y = 92 \end{cases}$$

Resolvendo, temos: $y = 12$ e $x = z = 40$.

Logo, o sistema é possível e determinado.

3ª) Verdadeira, pois do enunciado do problema $x = z$, logo $x - z = 0$.

4ª) Verdadeira; a condição é $x = y = z$ e, da primeira equação do sistema dado, temos:

$x + 5x + 10x = 500 \Rightarrow 16x = 500$

O valor de **x** não é inteiro, o que torna impossível a condição.

5ª) Falsa; retirada a última equação do sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 5y + 10z = 500 \\ x + y + z = 92 \end{cases}$$

Subtraindo as equações, temos $4y + 9z = 408$.

Logo, $z = \dfrac{408 - 4y}{9} = \dfrac{4(102 - y)}{9}$.

Como **x**, **y**, **z** são números inteiros e positivos, conclui-se que $102 - y$ é múltiplo de 9. Então:

$102 - y = 9 \Rightarrow y = 93$

$102 - y = 18 \Rightarrow y = 84$

$102 - y = 27 \Rightarrow y = 75$

$\vdots$

$102 - y = 99 \Rightarrow y = 3$

Portanto, a quantidade de soluções é determinada, não havendo infinitas soluções.

– Química **131.** Determine **x**, **y**, **z** e **w** para que a equação química a seguir fique balanceada:

$$xAu(OH)_3 + yH_4P_2O_7 \rightarrow zAu_4(P_2O_7)_3 + wH_2O$$

Resolução:

A partir da equação montamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 4z \rightarrow \text{Ouro (Au)} \\ 3x + 4y = 2w \rightarrow \text{Hidrogênio (H)} \\ 3x + 7y = 21z + w \rightarrow \text{Oxigênio (O)} \\ 2y = 6z \rightarrow \text{Fósforo (P)} \end{cases}$$

cuja solução é $x = 4$, $y = 3$, $z = 1$ e $w = 12$.

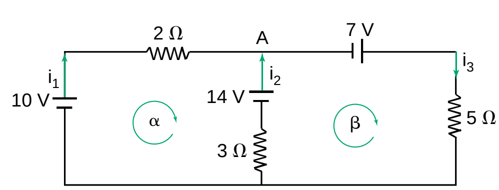
Dessa forma, o balanceamento acontece com:

$$\begin{cases} x = 4z \Rightarrow 4 = 4 \cdot 1 \text{ (4 átomos de Au)} \\ 3x + 4y = 2w \Rightarrow 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 2 \cdot 12 \text{ (4 átomos de H)} \\ 3x + 7y = 21z + w \Rightarrow 3 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 21 \cdot 1 + 12 \text{ (33 átomos de O)} \\ 2y = 6z \Rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \cdot 1 \text{ (6 átomos de P)} \end{cases}$$

A equação balanceada é:

$4Au(OH)_3 + 3H_4P_2O_7 \rightarrow Au_4(P_2O_7)_3 + 12H_2O$

– Física **132.** Calcule as intensidades das correntes i_1, i_2 e i_3 no circuito da figura:



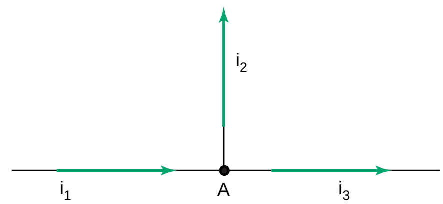
Resolução:

No estudo dos circuitos elétricos, usamos as leis de Kirchhoff:

1ª) A soma das intensidades de corrente que chegam a um nó é igual à soma das intensidades de corrente que deixam o nó.

No nó **A** da figura:

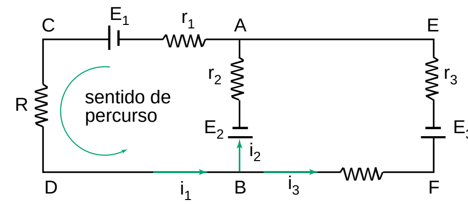
$i_1 = i_2 + i_3$



2ª) Percorrendo-se uma malha, num mesmo sentido, é nula a soma algébrica das tensões encontradas em cada elemento do circuito.

Na malha ACDBA, no sentido de percurso indicado na figura, tem-se:

$r_1i_1 - E_1 + Ri_1 + E_2 + r_2i_2 = 0$



Chega-se assim a um sistema de equações cuja solução permite determinar as grandezas de interesse.

Assim, de acordo com as leis de Kirchhoff, tem-se:

- no nó **A**: $i_1 + i_2 = i_3$
- na malha α: $-10 + 2i_1 + 14 - 3i_2 = 0$
- na malha β: $3i_2 - 14 - 7 + 5i_3 = 0$

Montando o sistema de equações e resolvendo-o, temos:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_3 \\ 2i_1 - 3i_2 = -4 \\ 3i_2 + 5i_3 = 21 \end{cases}$$

$i_1 = 1$ A, $i_2 = 2$ A e $i_3 = 3$A

Capítulo 25 — Análise combinatória

133. (PUC-SP) O novo sistema de placas de veículos utiliza um grupo de 3 letras (dentre 26 letras) e um grupo de 4 algarismos (por exemplo: ABC-1023). Uma placa dessas será "palíndroma" se os dois grupos que a constituem forem "palíndromos". O grupo ABA é "palíndromo", pois as leituras da esquerda para a direita e da direita para esquerda são iguais; da mesma forma, o grupo 1331 é "palíndromo". Quantas placas "palíndromas" distintas poderão ser construídas?

Resposta: 67 600 placas.

134. (Fuvest-SP) O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números 1, 2, 3, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadra), 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados.

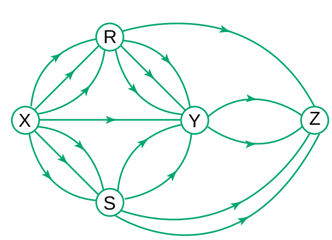
Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os $\binom{20}{6} = 38\,760$ jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena:

a) Quantas apostas premiadas com a quina este apostador conseguiu?

b) Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?

Resposta: a) 84 apostas; b) 1 365 apostas.

© **135.** (UFMG) Observe o diagrama.

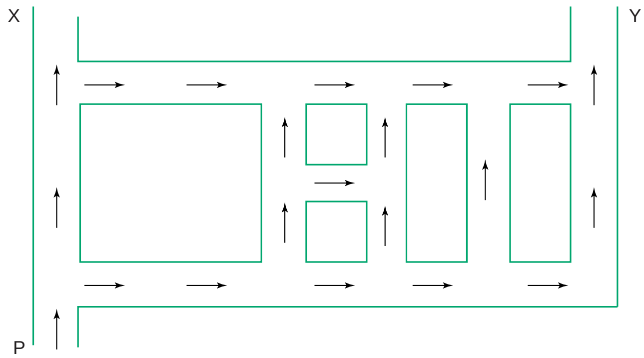


O número de ligações distintas entre **X** e **Z** é:

a) 39. b) 41. c) 35. d) 45.

Resposta: alternativa **b**.

© **136.** (Cesgranrio-RJ) A figura abaixo representa uma área de ruas de mão única. Em cada esquina em que há duas opções de direção (veja a figura) o tráfego se divide igualmente entre elas. Se 512 carros entram na área por **P**, o número dos que vão sair por **Y** é:



a) 128. b) 192. c) 256. d) 320. e) 384.

Resposta:
Determinamos os que saem por **X**:
512 : 2 = 256 e 256 : 2 = 128
O número dos que vão sair por **Y** é 512 − 128 = 384 (alternativa **e**).

© **137.** (UNI-Rio-RJ) Em um tabuleiro com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas.
Podemos afirmar que:
a) todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
b) nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
c) alguma coluna não tem casas ocupadas.
d) alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
e) todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

Resposta:
Se todas as linhas tivessem menos de 6 casas ocupadas, teríamos no máximo $6 \cdot 5 = 30$ casas ocupadas, logo, para termos 32 casas ocupadas, ao menos uma linha deverá ter 6 casas ocupadas.
Portanto, a resposta correta é a alternativa **d**.

© **138.** (Fatec-SP) Há 12 inscritos em um campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas, entre os inscritos, é:
a) 12. b) 24. c) 33. d) 66. e) 132.
Resposta: alternativa **d**.

© **139.** (Faap-SP) Em um campeonato de dois turnos, em que devem jogar 12 equipes de futebol, qual o número total de jogos a serem realizados?
Resposta: 132 jogos.

© **140.** (Fuvest-SP) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
Resposta: alternativa **d**.

© **141.** (PUC-RS) Em uma maratona de 42 km, 10 atletas disputam os três primeiros lugares. Não acontecendo empates, o número de resultados possíveis para as três primeiras colocações é:
a) 27. b) 30. c) 42. d) 120. e) 720.
Resposta: alternativa **e**.

TM **Números naturais**

142. (Vunesp) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}. Quantos números de dois algarismos distintos é possível formar com os elementos do conjunto **A** de modo que:
a) a soma dos algarismos seja ímpar?
b) a soma dos algarismos seja par?
Resposta: a) 12 números; b) 8 números.

TM **Equações**

143. Quantas raízes distintas tem a equação $C_{10,\,x^2} = C_{10,\,3x}$?
a) Nenhuma. b) Uma. c) Duas. d) Três. e) Quatro.
Resposta: alternativa **d**.

© **144.** (FCMSCSP) Existem 4 estradas de rodagem e 3 estradas de ferro entre as cidades **A** e **B**. Quantos são os diferentes percursos para fazer a viagem de ida e volta entre **A** e **B**, utilizando rodovia e trem, obrigatoriamente, em qualquer ordem?
a) $4! \cdot 3!$ b) $2^{-1} \cdot 4! \cdot 3!$ c) 24 d) 12 e) 7
Resposta: alternativa **c**.

© **145.** (Unicamp-SP) Sete tijolos, cada um de uma cor, são empilhados. De quantos modos se pode fazer isso de forma que o verde e o amarelo estejam sempre juntos?
Resposta: 1 440 modos.

TM Geometria **146.** (UFMG) Em um plano **P** tomam-se 5 pontos distintos, dos quais não existem 3 em linha reta. Fora de **P**, toma-se um ponto **A**. Quantos tetraedros, tendo um vértice em **A** e os outros nos pontos tomados em **P**, podemos determinar?
a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) nenhuma anterior
Resposta: alternativa **d**.

© **147.** (PUC-PR) As placas dos automóveis são formadas por 3 letras seguidas de 4 algarismos. Com as letras e algarismos do conjunto {A, B, C, D, 1, 3, 5, 7, 9}, quantas placas podemos fazer começando com a letra **A**, sendo possível repetir as letras, mas não os algarismos na mesma placa?
a) 40 000 b) 2 880 c) 31 720 d) 1 920 e) 7 680
Resposta: alternativa **d**.

© **148.** (Uni-Rio-RJ) As novas placas dos veículos são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos, como por exemplo GYK 0447. O número de placas diferentes que podem ser construídas é, em milhões de placas, aproximadamente igual a:
a) 1. b) 25. c) 75. d) 100. e) 175.
Resposta: alternativa **e**.

© **149.** (PUC-SP) Para ter acesso a certo arquivo de um microcomputador, o usuário deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por três algarismos distintos e, se a senha digitada for aceita, digitar uma segunda senha, composta por duas letras distintas, escolhidas num alfabeto de 26 letras.
Quem não conhece as senhas pode fazer tentativas. O número de tentativas necessárias para ter acesso ao arquivo é:
a) 4 120. b) 3 286. c) 2 720. d) 1 900. e) 1 370.
Resposta: alternativa **e**.

© **150.** (Vunesp) De uma certa doença são conhecidos **n** sintomas. Se, num paciente, forem detectados **k** ou mais desses possíveis sintomas, $0 < k \leqslant n$, a doença é diagnosticada. Seja S(n, k) o número de combinações diferentes dos sintomas possíveis para que o diagnóstico possa ser completado de maneira segura.
a) Determine S(6, 4).
b) Dê uma expressão geral para S(n, k), em que **n** e **k** são inteiros positivos, com $0 < k \leqslant n$.
Resposta:

O número de maneiras de escolher **p** entre **n** sintomas é $C_{n,\,p} = \binom{n}{p}$.

a) O número de maneiras de escolher 4 ou mais entre 6 sintomas é:
$S(6, 4) = C_{6,\,4} + C_{6,\,5} + C_{6,\,6} = 15 + 6 + 1 = 22$

b) O número de maneiras de escolher **k** ou mais entre **n** sintomas é:

$$S(n, k) = C_{n,\,k} + C_{n,\,k+1} + \ldots + C_{n,\,n} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{p=k}^{n} \binom{n}{p}$$

Capítulo 26 — Probabilidade

© **151.** (Vunesp) O resultado de uma pesquisa realizada pelo Ipespe sobre o perfil dos fumantes e publicada pela revista *Veja* de 3/6/98 mostra que, num grupo de 1 000 pessoas, 17% fumam e, dentre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1 000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente:
a) 0,044. b) 0,075. c) 0,44. d) 0,0075. e) 0,0044.
Resposta: alternativa **b**.

TM Divisibilidade em ℕ **152.** (UFPE) Escolhendo aleatoriamente um natural no conjunto {1, 2, ..., 100} de naturais sucessivos, seja **p** a probabilidade de este natural ser divisível por 2 ou por 3. Indique 100p.
Resposta:
divisíveis por 2 = 50 → metade de 100
divisíveis por 3 = 33 → 99 = 3 + (n − 1)3
divisíveis por 6 = 16 → 96 = 6 + (n − 1)6
divisíveis por 2 ou 3: 50 + 33 − 16 = 67

$$p = \frac{67}{100} \Rightarrow 100p = 67$$

© **153.** (PUC-PR) De um grupo de 15 rapazes, 5 devem ser relacionados ao acaso para formar um time de basquete. Entre os 15 rapazes estão Carlos e Augusto. Qual a probabilidade de que ambos sejam selecionados?

a) $\frac{8}{21}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{5}{33}$

Resposta: alternativa **c**.

TM Divisibilidade em ℕ e PA

154. (UFPE) Considere o conjunto {11, 12, 13, ..., 300} de naturais sucessivos e **p** a probabilidade de um elemento, escolhido aleatoriamente nesse conjunto, ter a soma de seus dígitos múltiplos de 3. Determine o natural mais próximo de 100p e indique a soma de seus dígitos.

Resposta:

$$100p = \frac{970}{29} \cong 33{,}4$$

O número natural mais próximo de 100p é 33, cuja soma dos dígitos é 6 (3 + 3).

TM Adição em ℕ

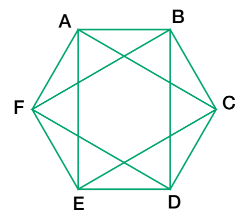
155. (Vunesp) Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que suas faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:

a) $\frac{1}{6}$. b) $\frac{4}{9}$. c) $\frac{2}{11}$. d) $\frac{5}{18}$. e) $\frac{3}{7}$.

Resposta: alternativa **d**.

TM Polígonos regulares

156. (Vunesp) Escolhem-se aleatoriamente três dos seis vértices de um hexágono regular. Qual a probabilidade de que os vértices escolhidos formem um triângulo eqüilátero?



Resposta:

$$C_{6,\,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

Triângulos eqüiláteros: 2($\triangle$ACE e $\triangle$BDF)

$$p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

© **157.** (PUC-SP) Três pessoas, A, B e C, vão participar de um concurso num programa de televisão. O apresentador faz um sorteio entre A e B e, em seguida, faz um sorteio entre C e o vencedor do 1º sorteio, para decidir quem iniciará o concurso. Se em cada sorteio as duas pessoas têm a mesma "chance" de ganhar, qual é a probabilidade de A iniciar o concurso?

a) 12,5% b) 25% c) 50% d) 75% e) 90%

Resposta: alternativa **b**.

TM Números naturais

158. (UFPR) Cem bolas estão identificadas, cada uma delas por um número; para essa identificação foram utilizados os vinte primeiros da seqüência 2, 4, 8, 16, ... e os oitenta primeiros da seqüência 1, 3, 5, 7, ... Assim, verifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

1ª) O maior número par utilizado é igual a 2^{20}.

2ª) O maior número ímpar utilizado é 161.

3ª) Se todas as bolas estiverem numa urna e for retirada aleatoriamente apenas um delas, então a probabilidade de que esta bola tenha número par é $\frac{1}{5}$.

4ª) Se todas as bolas estiverem numa urna e forem retiradas aleatoriamente apenas duas delas, uma de cada vez e sem recolocação na urna, então a probabilidade de que estas duas bolas tenham número ímpar é 64%.

5ª) Do conjunto das cem bolas podem ser formados 9 900 subconjuntos distintos, cada um contendo somente duas bolas.

Resposta: 1ª) V; 2ª) F; 3ª) V; 4ª) F; 5ª) F.

© **159.** (Unicamp-SP) Ao se tentar abrir uma porta com um chaveiro contendo várias chaves parecidas, das quais apenas uma destranca a referida porta, muitas pessoas acreditam que é mínima a chance de se encontrar a chave certa na primeira tentativa, e chegam mesmo a dizer que essa chave só vai aparecer na última tentativa. Para esclarecer essa questão, calcule, no caso de um chaveiro contendo 5 chaves:

a) a probabilidade de se encontrar a chave certa depois da primeira tentativa;

b) a probabilidade de se acertar na primeira tentativa;

c) a probabilidade de se acertar somente na última tentativa.

Resposta:

a) $\frac{4}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right)$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{5}\left(\frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 1\right)$

Capítulo 30 — Geometria analítica: ponto e reta

160. (Fuvest-SP) Para que a reta de equação $x - 3y + 15 = 0$ seja paralela à reta determinada pelos pontos **A**(a, b) e **B**(1, 2), deve-se ter:

a) $a = -3b + 5$.
b) $a = 3b - 5$.
c) $a = 3b - 7$.
d) $a = -3b + 7$.
e) $a = \frac{b}{3} - \frac{7}{3}$.

Resposta: alternativa **b**.

161. (Cefet-PR) Considere um trapézio de vértices **A**(−2, 5), **B**(−2, −3), **C**(4, −3) e **D**(7, 5) e uma reta **r** que passa por **C** e forma um ângulo de 135° com o semi-eixo positivo **x**, no sentido anti-horário. A intersecção da reta **r** com o lado AB do trapézio se dará em:

a) (−3, 2). b) (−2, 3). c) (3, −2). d) (−2, 5). e) (−2, 4).

Resposta: alternativa **b**.

TM
Quadriláteros

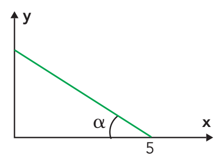
162. (Fuvest-SP) No plano cartesiano, os pontos (1, 0) e (−1, 0) são vértices de um quadrado cujo centro é a origem. Qual a área do quadrado?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resposta: alternativa **b**.

TM
Trigonometria

163. (FGV-SP) Dada a reta da figura, em que $\alpha = 30°$, sua intersecção com a reta $x - y = 0$ se dá em:



a) $x = \frac{5}{(1 + \sqrt{3})}$. b) $y = 1 + \sqrt{3}$. c) $x = \frac{(1 + \sqrt{3})}{5}$. d) $x = \frac{\sqrt{3}}{5}$. e) $y = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Resposta: alternativa **a**.

TM
Sistemas

164. (UFPE) Os vértices de um triângulo num sistema cartesiano são intersecções das retas $y + 4x = 11$, $5y - 2x = 11$ e $3y + x = 0$. Determine a área desse triângulo e indique o produto de seus dígitos.

Resposta:
Vértices: (2, 3), (−3, 1) e (3, −1)
A = 11 e produto dos dígitos = 1

TM
Determinantes

165. (FEI-SP) As retas **r** e **s** são dadas na forma de determinante, como segue:

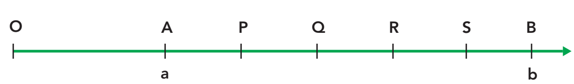
$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad s: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para que valores de **a** as retas são paralelas?

Resposta: $a = -1$ ou $a = 3$.

TM
Média ponderada

166. (UFMG) Observe a reta numérica:



Nessa reta, o segmento AB está dividido em cinco partes iguais. As coordenadas de **A** e **B** são **a** e **b**, respectivamente.

Define-se a média ponderada dos números **a** e **b** com pesos **m** e **n**, respectivamente, por $\frac{ma + nb}{m + n}$.

Para localizar o ponto da reta numérica cuja coordenada é $\frac{ma + nb}{m + n}$, pode-se usar a equivalência

$$\frac{ma + nb}{m + n} = a + \frac{n}{m + n}(b - a).$$

O ponto da reta numérica de coordenada $\frac{2a + 3b}{5}$ é:

a) **R**. b) **Q**. c) **S**. d) **P**.

Resposta: alternativa **a**.

TM
Matrizes

167. (Mack-SP) Determine a relação entre **n** e **k** para que o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1,5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}$ represente:

a) duas retas paralelas coincidentes;
b) duas retas paralelas e distintas.

Respostas:

a) $n = \dfrac{3k}{2}$
b) $n \neq \dfrac{3k}{2}$

Capítulo 31 — Geometria analítica: circunferência

TM
Quadriláteros

168. O segmento AB, com **A**(3, 4) e **B**(−3, −2), é uma das diagonais de um quadrado. Determine a equação da circunferência circunscrita a esse quadrado e da circunferência inscrita nele.

Resposta:
circunscrita: $x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$
inscrita: $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

169. (UFPR) Considerando que as trajetórias dos móveis **A**, **B** e **C** estejam representadas em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e sejam expressas pelas equações $2x - y = 0$, $y - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$, respectivamente, classifique em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as seguintes afirmações:

a) A trajetória de **B** é uma reta paralela ao eixo **y**;
b) As trajetórias de **A** e **C** são tangentes entre si.
c) A trajetória de **C** é uma circunferência.
d) As trajetórias de **A** e **B** se intersectam no ponto (1, 1).
e) Se α é o menor ângulo que a trajetória de **A** faz com o eixo das abscissas, então $\text{tg}\,\alpha = 2$.

Respostas:
a) **F** b) **F** c) **V** d) **F** e) **V**

e – Física

170. (Unicamp-SP) Os ciclistas **A** e **B** partem do ponto **P**(−1, 1) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista **A** segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista **B**, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o quilômetro.

a) Quais as coordenadas do ponto **Q**, distinto de **P**, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?
b) Se a velocidade do ciclista **A** for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista **B** para que cheguem no mesmo instante ao ponto **Q**?

Respostas:
a) **Q**(7, 7) b) 10π ou $\cong 31,4$ km/h

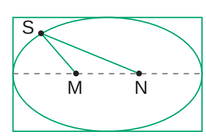
Capítulo 32 — Geometria analítica: secções cônicas

TM
Triângulo eqüilátero e Trigonometria

171. (Fuvest-SP) Calcule a área do triângulo eqüilátero com um vértice no ponto (0, 0) e os outros dois sobre a parábola $y = 2x^2$.

Resposta: $A = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

172. (Cesgranrio-RJ) Para determinar um gramado, um jardineiro traçou uma elipse inscrita num terreno retangular de 20 m por 16 m. Para isto, usou um fio esticado, preso por suas extremidades **M** e **N**, como na figura. A distância entre os pontos **M** e **N** é:



a) 10 m. b) 12 m. c) 12,5 m. d) 15 m. e) 18 m.

Resposta: alternativa **b**.

TM
Triângulos

173. $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ é um ponto da hipérbole da equação $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$, cujos focos são F_1 e F_2. Então, o $\triangle AF_1F_2$ é:

a) retângulo e isósceles.
b) obtusângulo e escaleno.
c) acutângulo e isósceles.
d) acutângulo e escaleno.
e) eqüilátero.

Resposta: alternativa **c**.

174. (Cesgranrio-RJ) Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto **P** de coordenadas (4, 10) deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto **Q** de ordenada −6. A distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de **P** e **Q**) é:

a) 12. b) 4. c) 6. d) 3. e) 5.

Resposta: alternativa **b**.

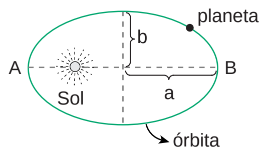
Outras atividades interdisciplinares envolvendo cônicas

A elipse na Astronomia

A seguir temos as três leis de Kepler sobre o movimento dos planetas.

1ª lei de Kepler — Lei das órbitas

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse.



a = semi-eixo maior (raio médio da órbita descrita)

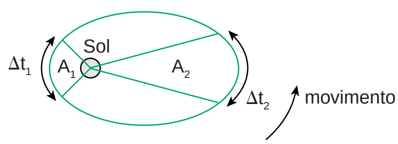
b = semi-eixo menor

A = periélio (ponto mais próximo do Sol)

B = afélio (ponto mais distante do Sol)

2ª lei de Kepler — Lei das áreas

O segmento imaginário que une o centro do Sol ao centro do planeta varre áreas proporcionais aos tempos gastos em varrê-las.

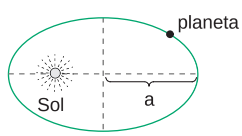


$$\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = k \text{ (constante)}$$

Como conseqüência dessa propriedade, temos que a velocidade dos planetas é maior quando eles estão mais próximos do Sol e menor quando estão mais longe.

3ª lei de Kepler — Lei dos períodos

O quadrado do tempo **t**, necessário para um planeta completar uma volta em torno do Sol, é proporcional ao cubo de sua distância média do Sol.



a = semi-eixo maior = distância média do planeta ao Sol.

$$\frac{t^2}{a^3} = k \text{ (constante)}$$

ou

$$t^2 = ka^3$$

Exemplo de atividade

(Vunesp) A Terra descreve uma elipse em torno do Sol cuja área é $A = 6{,}98 \cdot 10^{22}\ m^2$.

a) Qual é a área varrida pelo raio que liga a Terra ao Sol desde a zero hora do dia 1º de abril até as 24 horas do dia 30 de maio do mesmo ano?

b) Qual foi o princípio ou a lei que você usou para efetuar o cálculo acima?

Respostas:

a) Aproximadamente $1{,}16 \cdot 10^{22}\ m^2$.

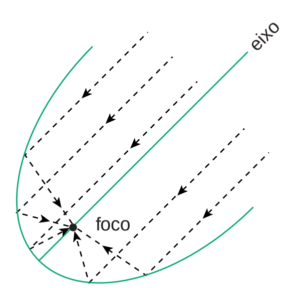
b) 2ª lei de Kepler.

A parábola na Óptica

Antena parabólica

Ao girarmos uma parábola em torno do seu eixo surge a *superfície parabólica* ou *parabolóide de revolução*. Essa superfície tem importantes aplicações baseadas numa propriedade geométrica da parábola. Expondo-se uma superfície parabólica aos raios do Sol, esses raios convergem para o foco e acendem um cigarro, por exemplo.

Atualmente isso é usado nas antenas parabólicas, nos faróis dos veículos, nos holofotes, etc. Nas antenas parabólicas, por exemplo, os fracos sinais (ondas) vindos de um satélite refletem sobre sua superfície e convergem para o foco, amplificando sua intensidade.



Telescópio refletor*

O telescópio refletor mais simples tem um espelho com seções planas parabólicas. Os raios paralelos de luz vindos das estrelas são refletidos pelo espelho ao olho ou a uma câmara no foco das parábolas (figura 1). Isso ocorre porque a reta tangente em um ponto P da parábola forma ângulos iguais com a reta paralela aos eixos e com o *raio focal*, que é a reta de P ao foco (figura 2).

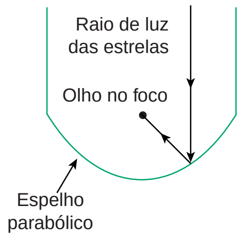


Figura 1: Telescópio refletor.

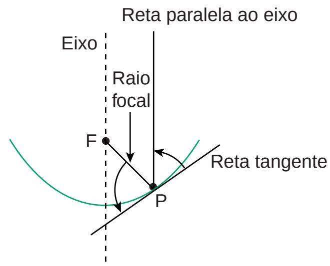


Figura 2: A reta tangente faz ângulos iguais com o raio focal e a reta paralela ao eixo.

(Veja ainda, sobre esse assunto, Uma propriedade notável da parábola, Elon Lages Lima e outros, *A Matemática do Ensino Médio*, Rio de Janeiro, SBM, 1996, v. 1, p. 134.)

A elipse na Óptica*

Se um raio de luz passa por um foco de uma elipse e se reflete na elipse, então ele também passa pelo outro foco (figura 1), porque a reta tangente em um ponto P da elipse forma ângulos iguais com os raios focais nesse ponto (figura 2).

Esta propriedade das elipses é usada em "salas de sussurro". Nessas salas, os tetos têm seções retas que são arcos de elipse. Uma pessoa na posição de um dos focos da elipse em uma extremidade pode ouvir outra pessoa sussurrar no outro foco, porque todo o som de um foco que bate no teto é refletido para o outro foco.

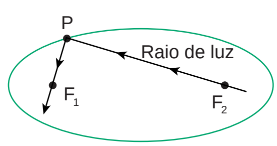


Figura 1

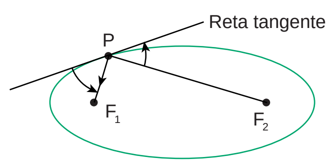


Figura 2: A reta tangente forma ângulos iguais com os raios focais.

A hipérbole na Óptica*

Um raio de luz que se aproxima de uma hipérbole do lado oposto a um foco em direção ao foco se reflete para fora da hipérbole em direção ao outro foco (figura 1), porque a reta tangente num ponto P da hipérbole bissecciona os raios focais em P (figura 2).

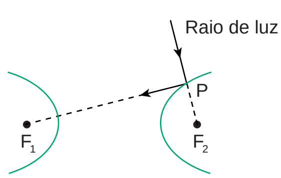


Figura 1

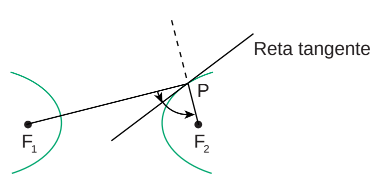


Figura 2: Os raios focais formam ângulos iguais com a reta tangente.

Essa propriedade das hipérboles é empregada no telescópio de Cassegrain, que tem um espelho com seções retas hiperbólicas e um espelho com seções retas parabólicas (figura 3). Um foco do espelho hiperbólico está no foco do espelho parabólico e o outro está no vértice do espelho parabólico, onde está o olho ou uma câmara. Os raios paralelos de luz das estrelas refletem para fora do espelho parabólico, na direção de seu foco e, então, para fora do espelho hiperbólico, na direção do olho ou da câmara.

* **Fonte:** Al Shenk. *Cálculo e Geometria analítica.* Rio de Janeiro, Campus, 1984.

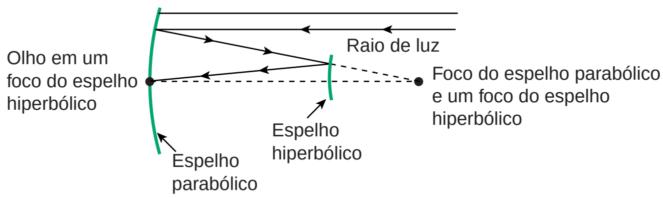


Figura 3: Telescópio de Cassegrain.

A hipérbole na navegação*

O sistema LORAN (*Long Range Navigation*) permite aos navios determinar sua localização pelo rádio. Essencialmente, uma estação-chefe transmite pulsações com intervalos de 0,05 segundo e uma estação-escrava transmite pulsações 0,001 segundo mais tarde. Um navio tem equipamento que mede a demora entre a captação dos sinais das duas estações. Usando dois pares de estações ou uma estação-chefe e duas escravas, como na figura 1, o navio determina sua localização como uma intersecção de hipérboles. Um navio em **F** na figura 1, por exemplo, recebe os sinais da estação-chefe 3 000 microssegundos (0,003 segundo) antes dos sinais da escrava 1 e 2 500 microssegundos antes dos sinais da escrava 2. Sua posição é a intersecção das hipérboles sobre as quais esse tempo leva para ocorrer. (Os tempos de demora para a estação-chefe e a escrava 1 são constantes sobre as semi-hipérboles traçadas com linhas tracejadas. Os tempos de demora para a estação-chefe e a escrava 2 são constantes sobre as semi-hipérboles traçadas com linhas contínuas. Os tempos são medidos em microssegundos.)

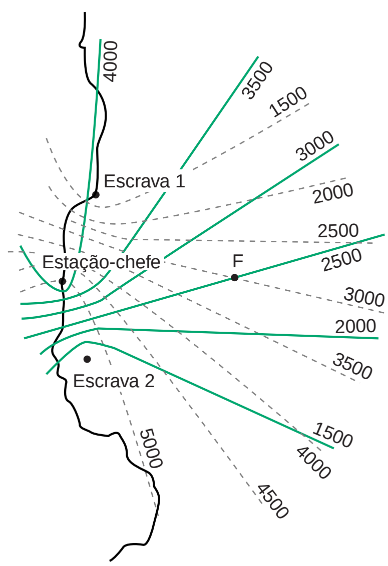


Figura 1. (*Adaptada de McGraw-Hill Encyclopedia of Science*. v. 7, p. 662.)

Capítulo 33 — Números complexos

TM Determinantes

175. (PUC-SP) Determine qual é o valor do módulo do número complexo $z = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i^5 & i^3 \end{bmatrix}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **d**.

TM Geometria analítica (distância entre dois pontos)

176. Se A é o afixo do número complexo $z = -3 - 5i$ e **B** é o afixo do número complexo $w = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, então a distância de **A** até **B** é igual a:

a) 8. b) $\sqrt{2}$. c) 10. d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. e) 6.

Resposta: alternativa **c**.

TM Geometria analítica: Circunferência

177. Considere o número complexo $z = a + bi$. Determine a equação da curva descrita pelos pontos (a, b), tal que $|2z - iz| = 3$.

Resposta: Circunferência $x^2 + y^2 = \frac{9}{5}$ de centro **C**(0, 0) e raio $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

* **Fonte:** Al Shenk. *Cálculo e Geometria analítica*. Rio de Janeiro, Campus, 1984.

Capítulo 34 — Polinômios e equações algébricas

TM
Determinantes Logaritmo Quadriláteros Análise combinatória

178. Determine o polinômio p(x) correspondente a cada situação:

a) a expressão do det A para $A = \begin{bmatrix} 3x^2 & 5x \\ x^2 - 2 & -x^3 \end{bmatrix}$;

b) a expressão de **N** na igualdade $\log N = 3 \cdot \log x + \log (x - 3) - 1$;

c) a área do losango de diagonais medindo $3x + 5$ e $2x - 4$;

d) a expressão de $A_{x+1,3}$.

Respostas:

a) $p(x) = -3x^5 - 5x^3 + 10x$

b) $p(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{10}x^3$

c) $p(x) = 3x^2 - x - 10$

d) $p(x) = x^3 - x$

TM
Campos magnéticos

179. (PUC-SP) Sabe-se que -1 é raiz do polinômio $f = x^3 + x^2 - 2x - 2$. As demais raízes desses polinômios são números:

a) irracionais.
b) não reais.
c) racionais não inteiros.
d) inteiros positivos.
e) inteiros e opostos entre si.

TM
Determinantes

180. (PUC-PR) O resto da divisão do polinômio $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ por $x - a$ é igual a:

a) -2.
b) -1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

Resposta: alternativa **c**.

TM
Análise combinatória e Determinantes

181. Os polinômios $p(x) = x^2 - 7x + 12$ e $q(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$ têm uma raiz comum. Se **r**, **s** e **p** são as raízes de q(x), na ordem crescente, calcule:

a) $C_{p,\,r}$

b) det A, para $A = \begin{bmatrix} r & s \\ p & 1 \end{bmatrix}$

Respostas:

$r = 2$, $s = 4$ e $p = 5$

a) $C_{5,\,2} = 10$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = -18$

TM
Funções

182. (UFPE) Seja f(x) um polinômio de grau $\leqslant 3$. Sabendo que o gráfico da função $y = f(x)$ passa pelos pontos $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(2, 0)$, calcule f(6).

Resposta: $f(6) = 70$

©

183. (PUC-SP) Um professor propôs a seus alunos a resolução de certa equação do 2º grau. Um dos alunos copiou errado apenas o coeficiente do termo do 1º grau e encontrou as raízes 1 e -3; outro aluno copiou errado apenas o termo constante, encontrando as raízes -2 e 4. Resolva a equação original, proposta pelo professor.

Resposta:

A equação original é equivalente a $x^2 - 2x - 3 = 0$, que tem o conjunto solução $S = \{-1, 3\}$.

TM
Logaritmo

184. A equação $3x^3 - 4x^2 - 5x + \log p = 0$ tem **r**, **s** e -1 como raízes, com $r > s$. O valor de $\frac{p - r}{s}$ é:

a) 294.
b) 0.
c) $\frac{98}{3}$.
d) $\frac{3}{98}$.
e) -294.

Resposta: alternativa **a**.

TM
Conjuntos

185. (Fatec-SP) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0\}$, então:

a) **A** tem 4 elementos.
b) **A** tem 5 elementos.
c) **A** é unitário.
d) **A** tem 3 elementos.
e) nda.

Resposta: alternativa **d**.